

AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ

CURVAS MÍNIMAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS  
ASSOCIADOS ÀS ÁLGEBRAS- $C^*$

AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ

CURVAS MÍNIMAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS  
ASSOCIADOS ÀS ÁLGEBRAS- $C^*$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.  
Orientador: Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández.

Curitiba  
2014

---

G924c

Guedez, Aura Rosa Belzare

Curvas mínimas em espaços homogêneos associados às álgebras- $C^*$  /  
Aura Rosa Belzare Guedez. – Curitiba, 2014.

70f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de  
Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Orientador: Carlos Eduardo Durán Fernández.

Bibliografia: p. 69-70.

1. Análise funcional. 2. Espaços homogêneos. I. Universidade Federal do  
Paraná. II. Fernández, Carlos Eduardo Durán. III. Título.

CDD: 515.7

---

TERMO DE APROVAÇÃO

**“CURVAS MÍNIMAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS  
ASSOCIADOS ÀS ÁLGEBRAS  $C$ ”**

por

**Aura Rosa Belzárez Guédez**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de

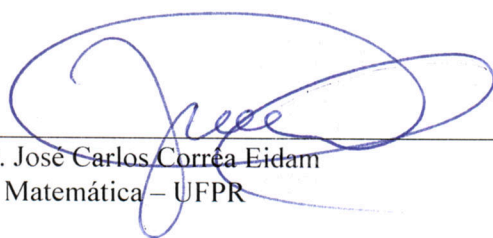
Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,

pela Comissão Examinadora composta por:

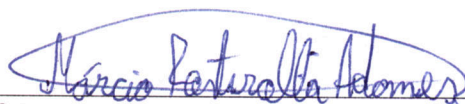
Orientador:



Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez  
Dep. de Matemática – UFPR



Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam  
Dep. de Matemática – UFPR



Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames  
UTFPR

Curitiba, 20 de fevereiro de 2014.



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

### ATA DA 58ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos vinte dias do mês de fevereiro de 2014, no Anfiteatro B, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Carlos Eduardo Duran Fernandez, a Banca Examinadora para a quinquagésima oitava Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam, da Universidade Federal do Paraná, Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e o Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às treze e trinta horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando a candidata **AURA ROSA BELZÁREZ GUÉDEZ** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "CURVAS MÍNIMAS EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS ASSOCIADOS ÀS ÁLGEBRAS  $C^n$ ". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 20 de fevereiro de 2014.

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez  
Presidente

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam  
Titular

Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames  
Titular



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

## PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação da candidata **AURA ROSA BELZÁREZ GUÉDEZ** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 20 de fevereiro de 2014.

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez  
Presidente

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam  
Titular

Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames  
Titular

Dedico este trabalho a Deus e aos meus grandes amores Teresa, Baudilio, Génesis, José, Manuela e Elvis pois sempre acreditaram e confiaram em mim.

# Agradecimentos

A Deus pela vida, saúde, capacitação e força para continuar.

Aos meus pais Teresa e Baudilio, aos meus irmãos Génesis e José pelo amor, compreensão apoio e por cada um dos telefonemas.

À minha avó (cucu) pelo carinho e pelos mimos.

Ao meu amor Elvis pelo amor incondicional, os dias de estudo, por me dar um abraço e secar minhas lágrimas sempre que precisei e por me ajudar com todos os desenhos desta dissertação.

Aos meus familiares que tanto me incentivaram e apoiam neste caminho, em especial, ao meu tio Rafael que sempre me estendeu a mão como a uma filha.

Ao meu orientador Carlos Durán pela dedicação, tempo e esforço nesta pesquisa e pela ajuda quando cheguei ao Brasil.

À minha orientadora da graduação Mireya Bracamonte por me preparar para o próximo passo.

Ao professor Rómulo Castillo pelo incentivo e pela ajuda para vir ao Brasil.

Aos membros da banca, professores Márcio e José Carlos, por aceitarem o convite e pelas correções para melhorar meu trabalho.

Aos meus amigos da Venezuela, do Brasil e aos não brasileiros que conheci aqui também. Em especial, a Yuli e Bea pela amizade além da distância e do tempo, a Stela por ser meu anjo brasileiro; ao Leo, Oscar e Marcos por suas sábias palavras, á minha turma de mestrado por ficarmos juntos até o final.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática pela oportunidade e formação de excelência.

E finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.



“São as nossas escolhas que revelam o que realmente somos, muito mais do que as nossas qualidades.”

J. K. Rowling

# Resumo

Consideramos problemas de minimalidade de curvas em espaços associados às álgebras- $C^*$ , tais como a Grassmaniana (o conjunto de projetores ortogonais) e as bandeiras generalizadas. Determinamos as curvas mínimas, que são projeções de subgrupos a um parâmetro no grupo unitário da álgebra, e os problemas de minimalidade de autovalores associado.

**Palavras-chave:** Álgebras- $C^*$ , espaços homogêneos, curvas mínimas .

# Abstract

We study minimality of curves in spaces associated to  $C^*$ -algebras, such as the Grassmannian (the set of orthogonal projections) and generalized flags. We determine the minimal curves, which are projections of one-parameter subgroups in the unitary group of the algebra, and the associated eigenvalue minimality problems.

**Keywords:**  $C^*$ -algebras, homogeneous spaces, minimal curves.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares de álgebras-<math>C^*</math></b>	<b>3</b>
1.1 Operadores limitados em espaços de Hilbert . . . . .	3
1.2 Álgebras de operadores . . . . .	9
1.2.1 Álgebras- $C^*$ de operadores . . . . .	9
1.2.2 Álgebras de Von Neumann . . . . .	11
1.3 Álgebras- $C^*$ abstratas e cálculo funcional . . . . .	15
1.3.1 Definições e primeiros exemplos . . . . .	15
1.3.2 Espectro de um elemento numa álgebra de Banach . . . . .	17
1.3.3 Espectro de um elemento numa álgebra- $C^*$ . . . . .	21
1.3.4 Teorema de Gelfand-Naimark . . . . .	25
1.3.5 Elementos positivos de álgebras- $C^*$ . . . . .	29
1.4 Estados e construção GNS . . . . .	31
1.4.1 Estados . . . . .	31
1.4.2 Construção GNS . . . . .	33
<b>2 Curvas mínimas em espaços associados às álgebras <math>C^*</math></b>	<b>35</b>
2.1 Minimalidade das geodésicas na variedade de Grassmann . . . . .	35
2.2 Geometria métrica em espaços homogêneos do grupo unitário de uma álgebra- $C^*$ : curvas mínimas . . . . .	42
2.2.1 Bandeiras generalizadas . . . . .	43
2.2.2 Funções que reduzem comprimento . . . . .	47
2.2.3 Condições geométricas para minimalidade . . . . .	51
2.2.4 O teorema de minimalidade . . . . .	54
2.2.5 Existência de curvas mínimas com velocidade inicial dada . . . . .	57
2.3 Alguns exemplos concretos . . . . .	60
2.3.1 Os exemplos mais simples . . . . .	60
2.3.2 Vetores tangentes tipo Grassmann . . . . .	61
2.3.3 Um exemplo concernente ao diâmetro . . . . .	62
2.3.4 Um exemplo de não unicidade . . . . .	62
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

# Introdução

O objetivo desta dissertação é descrever algumas construções que visam entender álgebras- $C^*$  através da *geometria* de alguns espaços associados.

Começamos com um exemplo: consideremos  $M_n(\mathbb{C})$ , o conjunto de matrizes  $n \times n$  complexas, que é o exemplo básico de álgebra- $C^*$  de dimensão finita. A variedade de Grassmann  $Gr(k, \mathbb{C}^n)$  de  $k$ -planos passando pela origem em  $\mathbb{C}^n$  pode ser identificada com o conjunto de projetores ortogonais

$$P_{k,n} = \{\pi \in M_n(\mathbb{C}) ; \pi^2 = \pi, \pi^* = \pi, \text{posto}(\pi) = k\}$$

via a associação  $\pi \mapsto \text{Im}(\pi)$ . Tirando a condição do posto, estamos considerando um espaço desconexo

$$P_n = \{\pi \in M_n(\mathbb{C}) ; \pi^2 = \pi, \pi^* = \pi\}$$

que inclui todas as variedades de Grassmann simultaneamente,  $Gr(k, n)$  para  $k = 0, \dots, n$ .

Observemos então que o conjunto  $P_n$  faz sentido para qualquer lugar onde estejam definidos o quadrado e uma involução  $*$ , em particular para *álgebras- $C^*$* :

**Definição 0.1** *Uma álgebra- $C^*$  é uma álgebra  $\mathcal{A}$  munida de uma norma  $a \mapsto \|a\|$  e de uma involução  $a \mapsto a^*$  tal que*

1.  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ ,
2.  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,
3.  $\mathcal{A}$  é completo com a norma dada.

Neste trabalho toda álgebra- $C^*$  terá identidade.

A geometria que vamos estudar neste trabalho é sobre *minimalidade de curvas*. Dada uma curva diferenciável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}$  definimos o comprimento

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

As perguntas básicas são: quais são as curvas de comprimento mínimo (geodésicas)? Até onde estas curvas minimizam? Qual é o diâmetro do espaço, medindo distâncias entre pontos como o ínfimo dos comprimentos das curvas unido-os? Responderemos estas questões para vários espaços interessantes associados às álgebras- $C^*$ , baseados na literatura [2, 10, 17].

Uma das características fundamentais deste trabalho é a seguinte: numa álgebra- $C^*$ , não podemos escolher a norma; ela está determinada pela estrutura algébrica. Esta norma não é diferenciável nem estritamente convexa; isto impossibilita o uso de técnicas

clássicas do Cálculo das Variações (equações de Euler-Lagrange), e são usados métodos geométricos diretos. A técnica principal usada é encontrar e estudar *funções que reduzem comprimento de curvas*. Como veremos na parte 2, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função que reduz comprimento de curvas e conhecemos as curvas mínimas de  $Y$ , isto pode ser usado para encontrar as curvas mínimas de  $X$ .

O trabalho está estruturado em duas partes: na primeira parte estudamos os pré-requisitos necessários de álgebras- $C^*$ . Pontos importantes neste estudo são:

- Álgebras de von Neumann, onde podemos estudar questões de convergência mais abrangentes que numa álgebra- $C^*$  geral;
- O cálculo funcional, que nos permite, por exemplo, calcular “logaritmos” de operadores;
- A construção GNS (Gelfand-Naimark-Segal), que é fundamental para construir *representações de álgebras- $C^*$* .

Na segunda parte estudamos exemplos específicos onde a minimalidade de curvas pode ser estudada:

- Na variedade de Grassmann de uma álgebra  $C^*$ , baseados no artigo [17].
- Este exemplo é estendido para as “Bandeiras generalizadas”, estudando o artigo [10].
- Finalmente, colocamos alguns exemplos em dimensão finita, dos artigos [2] e [10].

O que acontece é que, nestes casos, podemos descrever com bastante precisão as curvas mínimas. Primeiro, salientamos que o grupo unitário faz sentido para qualquer álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$

$$U(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{A} \mid uu^* = u^*u = 1\}$$

e teremos que as geodésicas são projeções de subgrupos a um parâmetro  $e^{tZ}$  do grupo unitário da álgebra, onde o gerador infinitesimal  $Z$  satisfaz uma condição de minimalidade. Esta condição de minimalidade gera, ainda em dimensão finita, problemas de autovalores interessantes não totalmente entendidos; por exemplo,

*Consideremos matrizes simétricas, escrita como blocos de submatrizes:*

$$Z_{D_1, \dots, D_n} = \begin{pmatrix} D_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12}^* & D_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & D_n \end{pmatrix}$$

Então, calcular, considerando  $a_{ij}$  fixos,

$$\inf_{D_1, \dots, D_n} Z_{D_1, \dots, D_n} \left( \max_{\lambda \text{ autovalor de } Z_{D_1, \dots, D_n}} |\lambda| \right)$$

Esperamos que este trabalho motive o estudo de encontrar invariantes métricos de álgebras- $C^*$ , e de pares  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  de álgebras- $C^*$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares de álgebras- $C^*$

Este capítulo contém o que consideramos essencial na teoria de álgebras- $C^*$  para nosso trabalho no capítulo seguinte e as principais referências são [4, 8, 9]. Vamos começar estudando uma classe mais geral de álgebra, a saber, álgebras de Banach. Estas são de interesse por si mesmas e em qualquer caso muitos dos conceitos introduzidos em nossa análise são necessários para álgebras- $C^*$ . Alguma percepção para o tipo de comportamento que pode ocorrer em diversas álgebras de Banach ajuda a apreciar quão bem comportadas são as álgebras- $C^*$ .

### 1.1 Operadores limitados em espaços de Hilbert

Nesta seção iremos nos dedicar ao estudo das noções básicas da teoria de operadores em espaços de Hilbert e de Banach, demonstramos alguns teoremas de importância fundamental para a teoria de operadores em espaços de Hilbert e de Banach, especificamente, dos chamados operadores limitados que servirão para uma melhor abordagem da teoria de álgebras- $C^*$  de operadores.

Denotamos por  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert complexo e por  $\mathcal{H}(1) = \{\xi \in \mathcal{H}; \|\xi\| \leq 1\}$  a bola unitária fechada em  $\mathcal{H}$ . Os espaços de Hilbert têm uma estrutura geométrica similar à de espaços euclidianos. A noção mais importante é a de ortogonalidade: para qualquer subconjunto  $S$  de  $\mathcal{H}$ , o subespaço linear fechado

$$S^\perp = \{\eta \in \mathcal{H}; \langle \xi, \eta \rangle = 0 \text{ para todo } \xi \in S\}$$

é ortogonal a  $S$ .

**Teorema 1.1 (Teorema de representação de Riesz)** *Seja  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  um funcional linear contínuo, então existe um único vetor  $\xi \in \mathcal{H}$  tal que*

$$\phi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle,$$

*para todo  $\eta \in \mathcal{H}$ . Além disso,  $\|\xi\| = \|\phi\| = \sup_{\eta \in \mathcal{H}(1)} |\phi(\eta)|$ .*

**Demonstração.** Se  $\phi = 0$ , então para  $\xi = 0 \in \mathcal{H}$  temos que  $\phi(\eta) = 0 = \langle \eta, 0 \rangle$  para todo  $\eta \in \mathcal{H}$ .

Se  $\phi \neq 0$ , então  $\text{Ker}(\phi) \neq \mathcal{H}$  e como  $\text{Ker}(\phi)$  é fechado no espaço completo  $\mathcal{H}$  tem-se que ele também é completo. Logo,  $\mathcal{H} = \text{Ker}(\phi) \oplus \text{Ker}(\phi)^\perp$ .

Seja  $y \in \text{Ker}(\phi)^\perp$  tal que  $y \neq 0$  o qual existe pois  $\text{Ker}(\phi) \neq \mathcal{H}$ . Dado  $\eta \in \mathcal{H}$ , considere  $v = \phi(\eta)y - \phi(y)\eta$ . Note que,

$$\phi(v) = \phi(\eta)\phi(y) - \phi(y)\phi(\eta) = 0$$

assim,  $v \in \text{Ker}(\phi)$  e portanto

$$0 = \langle v, y \rangle = \langle \phi(\eta)y - \phi(y)\eta, y \rangle = \phi(\eta)\langle y, y \rangle - \phi(y)\langle \eta, y \rangle.$$

Segue que  $\phi(\eta)\|y\|^2 = \phi(y)\langle \eta, y \rangle$ . Logo,  $\phi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle$  onde  $\xi = \frac{\overline{\phi(y)}y}{\|y\|^2}$ .

Para provar a unicidade suponha que existem  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$  tais que

$$\langle \eta, \xi_1 \rangle = \phi(\eta) = \langle \eta, \xi_2 \rangle,$$

para todo  $\eta \in \mathcal{H}$ . Isto implica que  $\langle \eta, \xi_1 - \xi_2 \rangle = 0$  para todo  $\eta \in \mathcal{H}$  de onde obtemos que  $\xi_1 - \xi_2 = 0$  e portanto  $\xi_1 = \xi_2$ . Assim, o vetor  $\xi \in \mathcal{H}$  tal que  $\phi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle$  para todo  $\eta \in \mathcal{H}$  é único.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para todo  $\eta \in \mathcal{H}(1)$  temos que

$$|\phi(\eta)| = |\langle \eta, \xi \rangle| \leq \|\eta\| \|\xi\| \leq \|\xi\|$$

então  $\|\phi\| = \sup_{\eta \in \mathcal{H}(1)} |\phi(\eta)| \leq \|\xi\|$ .

A outra desigualdade segue de

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \phi(\xi) = |\phi(\xi)| &= \frac{\|\xi\|}{\|\xi\|} |\phi(\xi)| \\ &= \|\xi\| \left| \phi\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) \right| \\ &\leq \|\xi\| \sup_{\eta \in \mathcal{H}(1)} |\phi(\eta)| \\ &= \|\xi\| \|\phi\|. \end{aligned}$$

Logo,  $\|\xi\| = \|\phi\|$ . □

**Teorema 1.2** *Sejam  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  dois espaços de Hilbert e seja  $a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  um operador linear. Então as três condições seguintes são equivalentes:*

1.  $\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \|a(\xi)\|$  é limitado.
2.  $a$  é contínuo.
3.  $a$  é contínuo num ponto de  $\mathcal{H}$ .

**Demonstração.** (1)  $\Rightarrow$  (2) Como  $\sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \|a(\xi)\|$  é limitado existe  $c > 0$  tal que  $\|a(\xi)\| \leq c$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}(1)$ . Sejam  $x, y \in \mathcal{H}$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$  tal que se  $\|x - y\| < \delta$ , então

$$\|a(x) - a(y)\| = \|a(x - y)\| = \|x - y\| \left\| a\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \right\| \leq c \|x - y\| < c\delta = \varepsilon.$$



(2)  $\Rightarrow$  (3) É direto.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Suponha que  $a$  é contínuo em  $x_0 \in \mathcal{H}$ , então para  $\varepsilon = 1$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $z \in \mathcal{H}$  com  $\|z - x_0\| < \delta$  implica que  $\|a(z - x_0)\| = \|a(z) - a(x_0)\| < 1$ .

Seja  $\xi \in \mathcal{H}(1)$ , tomemos  $z = \frac{\delta\xi}{2\|\xi\|} + x_0$ , logo  $\|z - x_0\| = \left\| \frac{\delta\xi}{2\|\xi\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$  e portanto  $\frac{\delta}{2\|\xi\|} \|a(\xi)\| = \left\| a\left(\frac{\delta\xi}{2\|\xi\|}\right) \right\| < 1$ , segue que  $\|a(\xi)\| < \frac{2}{\delta} \|\xi\| \leq \frac{2}{\delta}$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}(1)$ . Assim,  $\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \|a(\xi)\|$  é limitado.  $\square$

### Observação 1.3

- Sejam  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  dois espaços de Hilbert, o conjunto de todos os operadores lineares limitados de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}'$  com a norma definida como no teorema anterior é um espaço de Banach denotado por  $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .
- Seja  $\mathcal{H}''$  outro espaço de Hilbert, sejam  $a \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  e  $b \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$  segue que  $ba \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}'')$  e que  $\|ba\| \leq \|b\| \|a\|$ .
- Vamos escrever  $B(\mathcal{H})$  em lugar de  $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ , a norma definida como no teorema anterior faz  $B(\mathcal{H})$  uma álgebra de Banach pois  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in B(\mathcal{H})$  e  $B(\mathcal{H})$  é completo com essa norma.

Na proposição seguinte se constrói a operação involução correspondente ao símbolo  $*$  em  $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

**Proposição 1.4** *Sejam  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  espaços de Hilbert e  $a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  um operador linear limitado, existe um único operador linear limitado  $a^* : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $\langle a\xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^*\eta \rangle$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$ .*

**Demonstração.** Para cada  $\eta \in \mathcal{H}'$  defina a função  $g_\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  como sendo  $g_\eta(\xi) = \langle a(\xi), \eta \rangle$ . Sejam  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então

$$\begin{aligned} g_\eta(\alpha\xi_1 + \xi_2) &= \langle a(\alpha\xi_1 + \xi_2), \eta \rangle = \langle \alpha a\xi_1 + a\xi_2, \eta \rangle \\ &= \alpha \langle a\xi_1, \eta \rangle + \langle a\xi_2, \eta \rangle \\ &= \alpha g_\eta(\xi_1) + g_\eta(\xi_2) \end{aligned}$$

e concluímos que  $g_\eta$  é linear.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato de  $a$  ser limitado obtemos que

$$|g_\eta(\xi)| = |\langle a(\xi), \eta \rangle| \leq \|a(\xi)\| \|\eta\| \leq \|a\| \|\eta\|,$$

para todo  $\xi \in \mathcal{H}(1)$ . Assim,  $g_\eta$  é limitado e  $\sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} |g_\eta(\xi)| \leq \|a\| \|\eta\|$ . Portanto,  $g_\eta$  é linear e limitado e do teorema (1.2) obtemos que  $g_\eta$  é contínuo e pelo teorema de representação de Riesz existe um único  $y_\eta \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle a(\xi), \eta \rangle = g_\eta(\xi) = \langle \xi, y_\eta \rangle,$$

para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ . Além disso,  $\|y_\eta\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} |g_\eta(\xi)|$ .

Defina  $a^* : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  por  $a^*(\eta) = y_\eta$ . Logo,  $\langle a(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, a^*(\eta) \rangle$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$  e  $\|a^*(\eta)\| = \|y_\eta\|$ . Sejam  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}'$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  temos que

$$\begin{aligned} \langle \xi, a^*(\lambda\eta_1 + \eta_2) \rangle &= \langle a(\xi), \lambda\eta_1 + \eta_2 \rangle = \bar{\lambda}\langle a(\xi), \eta_1 \rangle + \langle a(\xi), \eta_2 \rangle \\ &= \bar{\lambda}\langle \xi, a^*(\eta_1) \rangle + \langle \xi, a^*(\eta_2) \rangle \\ &= \langle \xi, \lambda a^*(\eta_1) + a^*(\eta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Em consequência,  $\langle \xi, a^*(\lambda\eta_1 + \eta_2) - \lambda a^*(\eta_1) - a^*(\eta_2) \rangle = 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  o qual implica que  $a^*(\lambda\eta_1 + \eta_2) = \lambda a^*(\eta_1) + a^*(\eta_2)$  e assim  $a^*$  é linear. Vejamos que  $a^*$  é limitado,

$$\|a^*(\eta)\| = \|y_\eta\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} |g_\eta(\xi)| \leq \|a\| \|\eta\| \quad \text{para todo } \eta \in \mathcal{H}'.$$

Para provar a unicidade suponhamos que existem operadores lineares limitados  $a_1^* : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  e  $a_2^* : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$  tais que

$$\langle \xi, a_1^*(\eta) \rangle = \langle a(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, a_2^*(\eta) \rangle,$$

para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$ . Então  $\langle \xi, a_1^*(\eta) - a_2^*(\eta) \rangle = 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$  de onde concluímos que  $a_1^*(\eta) = a_2^*(\eta)$  para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$  e portanto  $a_1^* = a_2^*$ .  $\square$

**Definição 1.5** O operador  $a^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$  é o **adjunto** de  $a \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

**Observação 1.6**

- $(a + b)^* = a^* + b^*$
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $(a^*)^* = a$

**Proposição 1.7** Temos que  $\|a\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}(1) \\ \eta \in \mathcal{H}'(1)}} |\langle a(\xi), \eta \rangle| = \|a^*\|$  para todo  $a \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

**Demonstração.** Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e por  $a$  ser um operador limitado tem-se que

$$|\langle a(\xi), \eta \rangle| \leq \|a(\xi)\| \|\eta\| \leq \|a\| \|\xi\| \|\eta\| \leq \|a\|,$$

para todo  $\xi \in \mathcal{H}(1)$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'(1)$ . Logo,  $\|a\| \geq \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}(1) \\ \eta \in \mathcal{H}'(1)}} |\langle a(\xi), \eta \rangle|$ .

Agora assumamos que  $a \neq 0$  e escolha  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < \frac{\|a\|}{2}$ . Escolha  $\xi \in \mathcal{H}(1)$  tal que  $\|a(\xi)\| \geq \|a\| - \varepsilon$  e defina  $\eta = \frac{a(\xi)}{\|a(\xi)\|} \in \mathcal{H}'(1)$ . Assim,

$$|\langle a(\xi), \eta \rangle| = \left| \left\langle a(\xi), \frac{a(\xi)}{\|a(\xi)\|} \right\rangle \right| = \frac{1}{\|a(\xi)\|} \|a(\xi)\|^2 = \|a(\xi)\| \geq \|a\| - \varepsilon.$$

Portanto,  $\sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H}(1) \\ \eta \in \mathcal{H}'(1)}} |\langle a(\xi), \eta \rangle| \geq \|a\|$  e como  $|\langle a(\xi), \eta \rangle| = |\langle \eta, a(\xi) \rangle| = |\langle a^*(\eta), \xi \rangle|$  para todo

$\xi \in \mathcal{H}$  e para todo  $\eta \in \mathcal{H}'$  segue a segunda igualdade.  $\square$

**Corolário 1.8**  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  para todo  $a \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ .

**Demonstração.** Por um lado, pela proposição anterior temos que

$$\|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\| = \|a\| \|a\| = \|a\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|a\|^2 = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \|a(\xi)\|^2 = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \langle a(\xi), a(\xi) \rangle = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \langle \xi, a^*a(\xi) \rangle \leq \|a^*a\|.$$

Logo,  $\|a^*a\| = \|a\|^2$ . □

Essa última igualdade é denominada propriedade  $C^*$  e vale a pena mencionar que esta propriedade abre caminho para a importante teoria das chamadas álgebras- $C^*$  sobre as quais falaremos adiante. A definição de operador adjunto para operadores limitados em espaços de Hilbert é a inspiração da definição de álgebra involutiva a continuação.

**Definição 1.9** Uma **álgebra involutiva** é uma álgebra complexa  $A$  dada juntamente com uma involução  $\begin{cases} A & \rightarrow & A \\ a & \mapsto & a^* \end{cases}$  tal que para todo  $a, b \in A$  e todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfaz:

- $(a + b)^* = a^* + b^*$
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $(a^*)^* = a$
- Se a álgebra possuir uma unidade  $1^* = 1$ .

**Proposição 1.10** Seja  $a \mapsto \|a\|$  uma norma na álgebra involutiva  $A$  tal que  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in A$ . Então a igualdade  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  para todo  $a \in A$  implica a igualdade  $\|a^*\| = \|a\|$  para todo  $a \in A$ .

**Demonstração.** Pela hipótese temos que

$$\|a^*\|^4 = \|aa^*\|^2 = \|aa^*aa^*\| \leq \|a\| \|a^*a\| \|a^*\| = \|a\| \|a\|^2 \|a^*\| = \|a\|^3 \|a^*\|.$$

Logo,  $\|a^*\|^3 \leq \|a\|^3$  e portanto  $\|a^*\| \leq \|a\|$  para todo  $a \in A$ . Análogamente provamos que  $\|a\| \leq \|a^*\|$  para todo  $a \in A$ . □

**Definição 1.11** Uma álgebra involutiva  $A$  com uma norma satisfazendo  $\|a^*\| = \|a\|$  para todo  $a \in A$  é chamada uma **álgebra involutiva normada** e uma **álgebra involutiva de Banach** se além disso for completa com essa norma.

**Definição 1.12** Uma **representação-\*** de uma álgebra involutiva  $A$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é uma função linear  $\Phi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$  tal que  $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$  e  $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$  para todo  $a, b \in A$ .

**Teorema 1.13** Considere um operador  $a \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  e suponha que o espaço  $\mathcal{H}$  é de dimensão finita. Sejam  $\mu_1, \dots, \mu_n$  os autovalores de  $a^*a \in B(\mathcal{H})$ . Então

$$\|a\| = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \mu_j}.$$

Vamos agora introduzir algumas classes de operadores de grande importância na análise funcional.

**Definição 1.14** Um operador  $a \in B(\mathcal{H})$  é dito

- **Autoadjunto** se  $a^* = a$ .
- **Positivo** se  $\langle a(\xi), \xi \rangle \geq 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ .
- **Normal** se  $a^*a = aa^*$ .

**Observação 1.15**

- $a \in B(\mathcal{H})$  é autoadjunto se, e somente, se  $\langle a(\xi), \xi \rangle \in \mathbb{R}$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ .
- $a \in B(\mathcal{H})$  é normal se, e somente, se  $\|a^*(\xi)\| = \|a(\xi)\|$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ .

**Definição 1.16** Um operador  $u \in B(\mathcal{H})$  é dito **unitário** se  $u^*u = uu^* = 1$ . O grupo unitário de  $B(\mathcal{H})$  é

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{u \in B(\mathcal{H}); u^*u = uu^* = 1\}.$$

**Definição 1.17** Um operador linear não nulo  $p$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é dito ser um **projetor** se  $p^2 = p$  e é dito ser um **projetor ortogonal** se for um projetor e se for autoadjunto. No que segue vamos chamar os projetores ortogonais de projeções.

**Definição 1.18** Um operador  $w \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  é uma **isometria** se satisfaz  $w^*w = 1$  ou, equivalentemente,  $\|w(\xi)\| = \|\xi\|$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ .

**Observação 1.19**

- Todo operador positivo é autoadjunto.
- Nem todo projetor é ortogonal. Por exemplo, no espaço de Hilbert  $\mathbb{R}^2$  com o produto interno usual a matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  é um projetor, mas não é autoadjunta.
- Se  $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é uma projeção então  $\mathcal{H} = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .
- Em espaços de Hilbert toda projeção  $p$  é limitada e  $\|p\| = 1$ .
- Se  $p$  é uma projeção, então  $1 - p$  também é projeção e vale  $p(1 - p) = (1 - p)p = 0$ .

**Teorema 1.20** Para um operador  $w \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  as seguintes condições são equivalentes:

1.  $(w^*w)^2 = w^*w$ ,
2.  $(ww^*)^2 = ww^*$ ,
3.  $ww^*w = w$ ,
4.  $w^*ww^* = w^*$ ,
5. Existem dois subespaços fechados  $E \subset \mathcal{H}$  e  $E' \subset \mathcal{H}'$  tais que  $w$  é a composição da projeção de  $\mathcal{H}$  em  $E$ , de uma isometria de  $E$  em  $E'$  e da inclusão de  $E'$  em  $\mathcal{H}'$ .

Se essas condições valem então

$w^*w$  é a projeção de  $\mathcal{H}$  em  $E$

$ww^*$  é a projeção de  $\mathcal{H}'$  em  $E'$

e  $w$  é chamada a **isometria parcial** com espaço inicial  $E$  e projeção inicial  $w^*w$ , com espaço final  $F$  e projeção final  $ww^*$ .

Por exemplo a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  define uma isometria parcial no espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  com espaço inicial o primeiro eixo e com espaço final o segundo eixo.

**Proposição 1.21** Se  $a \in B(\mathcal{H})$  é autoadjunto então

$$\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} |\langle a(\xi), \xi \rangle|.$$

**Demonstração.** Chamemos  $K = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} |\langle a(\xi), \xi \rangle|$ . Para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}(1)$  temos que

$$\operatorname{Re} \langle a(\xi), \eta \rangle = \frac{1}{2} [\langle a(\xi), \eta \rangle + \langle a(\eta), \xi \rangle] = \frac{1}{4} [\langle a(\xi + \eta), \xi + \eta \rangle - \langle a(\xi - \eta), \xi - \eta \rangle].$$

Assim, usando a identidade do paralelogramo obtemos que

$$|\operatorname{Re} \langle a(\xi), \eta \rangle| \leq \frac{K}{4} [\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2] = \frac{K}{2} [\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2] \leq K.$$

Disso segue que  $|\langle a(\xi), \eta \rangle| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |\operatorname{Re} \langle a(\xi), e^{i\theta} \eta \rangle| \leq K$ , isto é,  $\|a\| \leq K$  pela proposição (1.7). A desigualdade oposta  $K \leq \|a\|$  é uma consequência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz.  $\square$

## 1.2 Álgebras de operadores

### 1.2.1 Álgebras- $C^*$ de operadores

**Definição 1.22** Uma **álgebra- $C^*$  de operadores** é uma subálgebra involutiva de Banach de  $B(\mathcal{H})$ . Uma subálgebra é involutiva se  $a^* \in \mathcal{A}$  sempre que  $a \in \mathcal{A}$ . Dada uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  em  $B(\mathcal{H})$ , uma **sub-álgebra- $C^*$**   $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra involutiva de Banach de  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo 1.23 (trivial)**

A própria álgebra  $B(\mathcal{H})$  é uma álgebra- $C^*$  de operadores em  $\mathcal{H}$ .

**Exemplo 1.24 (álgebra matricial)**

Dado um inteiro  $n \geq 1$  e o espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^n$ , identificamos a álgebra  $B(\mathbb{C}^n)$  com a álgebra  $M_n(\mathbb{C})$  de matrizes complexas  $n \times n$ . Então  $M_n(\mathbb{C})$  é uma álgebra- $C^*$  de operadores em  $B(\mathbb{C}^n)$ , a involução é dada por

$$(a^*)_{j,k} = \overline{a_{k,j}},$$

para todo  $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  e  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  e a norma é dada por

$$a \mapsto \|a\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^n \\ \|\xi\| \leq 1}} \|a\xi\| = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \mu_j}$$

onde  $\mu_1, \dots, \mu_n$  denota os autovalores de  $a^*a$ .

Lembremos o fato básico

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

para todo  $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Lema 1.25** Na álgebra involutiva  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , a única norma  $\nu$  tal que  $\nu(a^*a) = \nu(a)^2$  para todo  $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  é a norma de operador  $a \mapsto \|a\|$ .

**Demonstração.** Considere alguma matriz  $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  e a matriz  $d = a^*a$ . Para provar o lema é suficiente mostrar que  $\nu(d) = \|d\|$  pois disso segue que

$$\nu(a)^2 = \nu(a^*a) = \nu(d) = \|d\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Denotemos por  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  os autovalores de  $d$ , arranjados de forma que  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ . Para  $r \in \mathbb{R}^+$  o limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{r}\right)^k$  é zero se  $r > \mu_1$  e não existe se  $r < \mu_1$ . Obtemos que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^+; \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{r}\right)^k = 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^+; \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{2^l} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

agora afirmando que uma sequência de vetores em espaços vetoriais complexos de dimensão finita (aqui o espaço de matrizes de ordem  $n$ ) converge a zero se converge a zero para alguma norma porque todas as normas são equivalentes em dimensão finita. Em particular, temos que

$$\mu_1 = \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^+; \lim_{l \rightarrow \infty} \nu \left( \left(\frac{d}{r}\right)^{2^l} \right) = 0 \right\}.$$

Por hipótese em  $\nu$ , tem-se que  $\nu(d^2) = \nu(d^*d) = \nu(d)^2$  e assim  $\nu(d^{2^l}) = \nu(d)^{2^l}$  para cada  $l \geq 0$ . Logo,

$$\nu \left( \left(\frac{d}{r}\right)^{2^l} \right) = \nu \left( \frac{d}{r} \right)^{2^l} = \left( \frac{\nu(d)}{r} \right)^{2^l} \quad \text{e} \quad \mu_1 = \nu(d).$$

Pelo teorema (1.13) temos que  $\mu_1 = \|a^*a\| = \|d\|$  e assim  $\nu(d) = \|d\|$ . □

**Proposição 1.26** Seja  $A$  uma subálgebra involutiva de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . A única norma  $\nu : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\nu(a^*a) = \nu(a)^2$  para todo  $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  é a norma de operador  $a \mapsto \|a\|$ .

**Demonstração.** A prova é a mesma do lema anterior. □

### Observação 1.27

A proposição anterior mostra que subálgebras involutivas de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  são as mesmas que subálgebras- $C^*$  de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  com a norma satisfazendo  $\|a^*a\| = \|a\|^2$ .

### 1.2.2 Álgebras de Von Neumann

A teoria das álgebras de Von Neumann é um dos temas mais importantes da álgebra de operadores, porém nesta breve subseção restringimo-nos a apresentar apenas os resultados mais elementares sobre a mesma. Vamos começar definindo um conjunto de natureza algébrica.

**Definição 1.28** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e seja  $S$  um subconjunto de  $B(\mathcal{H})$ . O **comutante** de  $S$ , denotado por  $S'$ , é o conjunto de todos os elementos de  $B(\mathcal{H})$  que comutam com  $S$ , isto é,*

$$S' = \{a \in B(\mathcal{H}) ; as = sa \text{ para todo } s \in S\}.$$

*Escrevemos  $S''$  em lugar de  $(S')'$ , e  $S'''$  em lugar de  $(S'')'$ , etc.*

#### Observação 1.29

- Pode-se verificar que  $S'$  é uma sub-álgebra com unidade de  $B(\mathcal{H})$ . Mais que isso,  $S'$  é uma sub-álgebra de Banach de  $B(\mathcal{H})$ . Isso é constatado pelo seguinte argumento. Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $S'$  tal que  $a_n \rightarrow a \in B(\mathcal{H})$ . Para cada  $s \in S$  e todo  $n \in \mathbb{N}$  vale  $as - sa = (a - a_n)s - s(a - a_n)$ , pois  $a_ns = sa_n$ . Logo,  $\|as - sa\| \leq 2\|a - a_n\|\|s\|$  que converge a zero quando  $n \rightarrow \infty$ , estabelecendo que  $as = sa$ , ou seja, que  $a \in S'$ .
- Se  $S$  for um **subconjunto autoadjunto** de  $B(\mathcal{H})$  (isto é,  $s \in S \Leftrightarrow s^* \in S$ ), então  $S'$  é uma sub-álgebra involutiva com unidade de  $B(\mathcal{H})$  e, portanto, é uma sub-álgebra- $C^*$  de  $B(\mathcal{H})$ .
- Se  $S$  e  $T$  são dois subconjuntos de  $B(\mathcal{H})$  satisfazendo  $S \subset T$ , então  $T' \subset S'$ , que se verifica facilmente pela definição de comutante. Do mesmo pode-se verificar que  $S \subset S''$ .
- Do item anterior segue que  $B(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})''$ .

As observações de acima nos conduzem à seguinte definição.

**Definição 1.30** *Uma **álgebra de Von Neumann** em  $B(\mathcal{H})$  é uma sub-álgebra involutiva  $A$  de  $B(\mathcal{H})$  tal que  $A'' = A$ . Também vamos chamar de álgebra- $W^*$ .*

Observe-se que, pela definição, toda álgebra de von-Neumann em  $B(\mathcal{H})$  é uma sub-álgebra- $C^*$  com unidade de  $B(\mathcal{H})$ , exceto no caso trivial em que  $A = \{0\}$ .

Já conhecemos a topologia da norma em  $B(\mathcal{H})$ , que muitas vezes não é a mais interessante em  $S'$  pois este raramente é separável com essa norma. Há muitas outras topologias úteis em  $B(\mathcal{H})$  das quais definimos duas aqui.

**Definição 1.31** *Para qualquer  $a \in B(\mathcal{H})$  e  $\xi \in \mathcal{H}$ , defina*

$$\nu_\xi(a) = \{b \in B(\mathcal{H}) ; \|(b - a)\xi\| < 1\}.$$

*Interseções finitas dos  $\nu_\xi(a)$  constituem uma base de vizinhanças de  $a$  em  $B(\mathcal{H})$  para uma topologia Hausdorff localmente convexa em  $B(\mathcal{H})$  que é chamada de **topologia forte**.*

**Definição 1.32** Para qualquer  $a \in B(\mathcal{H})$  e  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ , defina

$$\nu_{\xi, \eta}(a) = \{b \in B(\mathcal{H}) ; |\langle (b - a)\xi, \eta \rangle| < 1\}.$$

Interseções finitas dos  $\nu_{\xi, \eta}(a)$  constituem uma base de vizinhanças de  $a$  em  $B(\mathcal{H})$  para uma topologia Hausdorff localmente convexa em  $B(\mathcal{H})$  que é chamada de **topologia fraca**.

**Observação 1.33**

Em termos de convergência as topologias da norma, forte e fraca podem ser descritas assim

- $a_\alpha \rightarrow a$  uniformemente se, e somente, se  $\|a_\alpha - a\| \rightarrow 0$ .
- $a_\alpha \rightarrow a$  fortemente se, e somente, se  $\|a_\alpha \xi - a\xi\| \rightarrow 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{H}$ .
- $a_\alpha \rightarrow a$  fracamente se, e somente, se  $|\langle a_\alpha \xi, \eta \rangle - \langle a\xi, \eta \rangle| \rightarrow 0$  para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ .

Note que convergência uniforme implica convergência forte e convergência forte implica convergência fraca. De fato, suponha que  $a_\alpha \rightarrow a$  uniformemente então para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  temos que

$$\|a_\alpha \xi - a\xi\| = \left\| (a_\alpha - a) \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\| \|\xi\| \leq \|a_\alpha - a\| \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Suponha agora que  $a_\alpha \rightarrow a$  fortemente então para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  tem-se que

$$|\langle a_\alpha \xi, \eta \rangle - \langle a\xi, \eta \rangle| = |\langle a_\alpha \xi - a\xi, \eta \rangle| \leq \|a_\alpha \xi - a\xi\| \|\eta\| \rightarrow 0.$$

**Proposição 1.34**

1. A topologia fraca em  $B(\mathcal{H})$  é mais fraca que a topologia forte, a qual é mais fraca que a topologia da norma.
2. As comparações de (1) são estritas quando  $\mathcal{H}$  é de dimensão infinita.

**Demonstração.** (1) Decorre da observação anterior.

(2) Por simplicidade de notação assumamos que  $\mathcal{H}$  é separável. Seja  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n$  denota a projeção de  $\mathcal{H}$  no espaço gerado por  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Então  $p_n$  converge fortemente para  $id_{\mathcal{H}}$ , mas não uniformemente. Por isso, a topologia forte é estritamente mais fraca que a topologia da norma.

Seja  $s$  a deslocção unilateral definida por  $se_n = e_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então para qualquer  $p, q \geq 1$ , o produto escalar  $\langle e_p, s^k e_q \rangle$  é zero para  $k$  suficientemente grande. Segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \eta, s^k \xi \rangle = 0$  para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ , ou seja, as potências  $s^k$  convergem fracamente a zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $\|s^k \xi\| = \|\xi\|$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $\xi \in \mathcal{H}$ , as potências  $s^k$  não convergem fortemente a zero. Assim, a topologia fraca é estritamente mais fraca que a topologia forte.  $\square$

**Lema 1.35** Seja  $S$  um subconjunto de  $B(\mathcal{H})$ , então o comutante  $S'$  é fracamente fechado.



**Demonstração.** Suponha que  $(a_\alpha) \subset S'$  é tal que  $a_\alpha \rightarrow a \in B(\mathcal{H})$  fracamente, ou seja,  $\lim_\alpha \langle (a_\alpha - a)\xi, \eta \rangle = 0$  para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  e como para cada  $s \in S$   $sa - as = s(a - a_\alpha) - (a - a_\alpha)s$  para todo  $\alpha$  temos que para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  vale

$$\langle (sa - as)\xi, \eta \rangle = \langle (s(a - a_\alpha) - (a - a_\alpha)s)\xi, \eta \rangle = \langle (a - a_\alpha)\xi, s^*\eta \rangle - \langle (a - a_\alpha)s\xi, \eta \rangle.$$

O lado esquerdo da cadeia de igualdades independe de  $\alpha$ . Porém  $\lim_\alpha \langle (a - a_\alpha)\xi, s^*\eta \rangle = \lim_\alpha \langle (a - a_\alpha)s\xi, \eta \rangle = 0$ . Logo, concluímos que  $\langle (sa - as)\xi, \eta \rangle = 0$  para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ , mostrando que  $sa = as$  de onde segue que  $a \in S'$ .  $\square$

O lema a seguir vai ser usado nas demonstrações dos teoremas de densidade de Von Neumann.

**Lema 1.36** *Seja  $S$  um subconjunto autoadjunto de  $B(\mathcal{H})$ , seja  $E$  um subespaço fechado de  $\mathcal{H}$  e seja  $p$  a projeção ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $E$ . Então,  $E$  é  $S$ -invariante se, e somente se  $p \in S'$ .*

**Demonstração.** Primeiro suponha que  $E$  é  $S$ -invariante, ou seja,  $sp = psp$  para todo  $s \in S$ . Como  $S$  é autoadjunto e  $p$  é projeção ortogonal tem-se que

$$ps = p^*s = (s^*p)^* = (ps^*p)^* = p^*sp^* = psp = sp,$$

para todo  $s \in S$ . Isto mostra que  $p \in S'$ .

Agora suponha que  $p \in S'$ , isto é,  $ps = sp$  para todo  $s \in S$ . Logo,

$$psp = spp = sp^2 = sp,$$

para todo  $s \in S$ . Obtemos que  $E$  é  $S$ -invariante.  $\square$

**Proposição 1.37 (Teorema de densidade de Von Neumann em dimensão finita)** *Seja  $A$  uma subálgebra involutiva de  $M_n(\mathbb{C})$  que contém a matriz identidade. Então  $A'' = A$ , ou seja,  $A$  é uma álgebra de Von Neumann em  $\mathbb{C}^n$ .*

**Demonstração.** Denotemos por  $\mathcal{K}$  a soma ortogonal de  $n$  cópias de  $\mathbb{C}^n$ . Denotemos por

$$\pi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow B(\mathcal{K})$$

a representação de  $M_n(\mathbb{C})$  em  $\mathcal{K}$  dada pela ação diagonal. Considere também uma base ortogonal  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{C}^n$ , o vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$$

e a projeção ortogonal  $p$  de  $\mathcal{K}$  sobre o subespaço  $\pi(A)v$ . O lema (1.36) mostra que  $p \in \pi(A)'$ .

Podemos escrever qualquer elemento em  $B(\mathcal{K})$  como uma matriz  $n \times n$  com entradas em  $M_n(\mathbb{C})$ , em outras palavras, podemos identificar  $B(\mathcal{K})$  com  $M_n(M_n(\mathbb{C}))$ . Então afirmamos que

$$\pi(A)' = M_n(A').$$

De fato, para

$$x = (x_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = B(\mathcal{K}),$$

as equações

$$\begin{aligned} \pi(a)x &= \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} = x\pi(a) \end{aligned}$$

para todo  $a \in A$  são equivalentes a

$$x_{j,k} \in A' \quad \text{para todo } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Similarmente tem-se que

$$\pi(A'') \subset \mathbb{M}_n(A')'.$$

Considere agora um elemento autoadjunto  $b \in A''$ . Pelo passo anterior temos que

$$\pi(b) \in \pi(A'') \subset \mathbb{M}_n(A')' = \pi(A)''$$

assim que  $\pi(b)$  comuta com  $p \in \pi(A)'$ ; o mesmo vale para  $\pi(b^*)$ . Portanto, o subespaço  $\pi(A)v$  é invariante por  $\pi(b)$ , novamente pelo lema (1.36). Em particular,

$$\pi(b)(\pi(1)v) = \begin{pmatrix} bv_1 \\ \vdots \\ bv_n \end{pmatrix} \in \pi(A)v$$

então  $b$  age em cada um dos  $v_1, \dots, v_n$  como um operador de  $A$ . Isto significa precisamente que  $b \in A$ . Mostramos que qualquer elemento  $b \in A''$  está em  $A$ .

□

**Teorema 1.38 (Teorema de densidade de Von Neumann)** *Seja  $A$  uma subálgebra involutiva de  $B(\mathcal{H})$  que contém  $\text{id}_{\mathcal{H}}$ . Então  $A$  é fortemente denso em  $A''$ .*

**Demonstração.** Seja  $b \in A''$  um elemento autoadjunto, sejam  $\xi_1, \dots, \xi_n$  vetores em  $\mathcal{H}$ , seja  $\varepsilon > 0$ , e seja

$$\nu = \{x \in B(\mathcal{H}) ; \|(x - b)\xi_j\| < \varepsilon \text{ para } j \in \{1, \dots, n\}\}$$

uma vizinhança básica forte de  $b \in B(\mathcal{H})$ , temos que mostrar que existe um elemento em  $A \cap \nu$ .

Denotemos por  $\mathcal{K}$  a soma ortogonal de  $n$  cópias de  $\mathcal{H}$  e por  $\pi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$  a representação diagonal. Considere o vetor

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}$$

e a projeção ortogonal  $p$  de  $\mathcal{K}$  sobre o fecho do subespaço  $\pi(A)\xi$  (em  $\mathcal{K}$ ). Então  $p \in \pi(A)'$  pelo lema (1.36).

Usando exatamente o mesmo argumento da prova da proposição (1.37) vemos que

$$\pi(b)(\xi) = \begin{pmatrix} b\xi_1 \\ \vdots \\ b\xi_n \end{pmatrix} \in \overline{\pi(A)\xi}.$$

Em particular, existe  $a \in A$  tal que  $\|(b-a)\xi_j\| < \varepsilon$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , isto é, existe  $a \in A \cap \nu$ .  $\square$

**Corolário 1.39 (Teorema do bicomutante)** *Seja  $A$  uma subálgebra involutiva de  $B(\mathcal{H})$  que contém  $\text{id}_{\mathcal{H}}$ . As seguintes são equivalentes:*

1.  $A$  é uma álgebra de Von Neumann, ou seja,  $A'' = A$ ,
2.  $A$  é fortemente fechado em  $B(\mathcal{H})$ ,
3.  $A$  é fracamente fechado em  $B(\mathcal{H})$ .

**Demonstração.** (1)  $\Rightarrow$  (3) porque os comutantes são fracamente fechados como se mostrou no lema (1.35), (3)  $\Rightarrow$  (2) porque a topologia fraca é mais fraca que a topologia forte e (2)  $\Rightarrow$  (1) pelo teorema de densidade de Von Neumann.  $\square$

A partir do teorema do bicomutante concluímos que é possível substituir a condição algébrica da definição das álgebras de Von Neumann por uma outra de caráter puramente topológico podendo as álgebras de Von Neumann ser definidas como uma sub-álgebra involutiva autoadjunta de  $B(\mathcal{H})$  que contém a identidade e é fracamente fechada ou fortemente fechada.

As definições topológica e algébrica descrevem álgebras de Von Neumann concretamente como um conjunto de operadores agindo em algum espaço de Hilbert. Sakai (1971) mostrou que álgebras de Von Neumann podem ser definidas abstratamente como álgebras- $C^*$  que têm um predual; em outras palavras, a álgebra de Von Neumann considerada como um espaço de Banach, é o dual de algum outro espaço de Banach chamado o predual. O predual de uma álgebra de Von Neumann é único exceto por isomorfismos.

## 1.3 Álgebras- $C^*$ abstratas e cálculo funcional

Esta seção é uma introdução às álgebras- $C^*$  gerais, com uma certa ênfase na teoria espectral, no cálculo funcional e no estudo dos elementos positivos dessa álgebra. Como veremos mais adiante álgebras- $C^*$  têm uma relação íntima com a teoria de operadores em espaços de Hilbert, até mesmo porque a álgebra  $B(\mathcal{H})$  é um exemplo básico de álgebra- $C^*$ .

### 1.3.1 Definições e primeiros exemplos

**Definição 1.40** *Uma álgebra- $C^*$  é uma álgebra involutiva  $\mathcal{A}$  munida de uma norma  $a \mapsto \|a\|$  tal que*

1.  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ ,

2.  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,
3.  $\mathcal{A}$  é completo com a norma dada.

**Observação 1.41** O corolário (1.8) mostra que, se  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, qualquer álgebra involutiva fechada de  $B(\mathcal{H})$  é uma álgebra- $C^*$ .

**Definição 1.42** Uma **sub-álgebra- $C^*$**  de uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  é uma subálgebra involutiva de  $\mathcal{A}$  a qual é completa com a norma.

**Definição 1.43** Um **morfismo**  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre duas álgebras- $C^*$  é uma função linear tal que

$$\begin{aligned}\Phi(ab) &= \Phi(a)\Phi(b) \\ \Phi(a^*) &= \Phi(a)^*,\end{aligned}$$

para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Lembre que uma **representação** de uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é um morfismo  $\mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ .

#### Exemplo 1.44 (Álgebra- $C^*$ de funções contínuas)

Seja  $X$  um espaço localmente compacto. A álgebra  $\mathcal{C}_0(X)$  de funções contínuas  $X \rightarrow \mathbb{C}$  que se anulam no infinito é uma álgebra- $C^*$  com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Esta álgebra possui uma unidade se, e somente, se  $X$  é compacto, em tal caso ela é a álgebra- $C^*$   $\mathcal{C}(X)$  de todas as funções contínuas em  $X$ .

#### Exemplo 1.45 (Álgebras de Banach que não são álgebras- $C^*$ )

- Na álgebra  $A = \mathcal{C}([-1, 1])$  de funções contínuas de  $[-1, 1]$  a  $\mathbb{C}$ , considere a norma definida por  $\|f\| = \sup_{|t| \leq 1} |f(t)|$  e a involução definida por  $f^{*!}(t) = \overline{f(-t)}$ . Então  $A$  é uma álgebra de Banach com uma involução tal que  $\|f^{*!}\| = \|f\|$  para todo  $f \in A$ . Mas  $A$  não é uma álgebra- $C^*$ ; de fato, para  $f$  definida por  $f(t) = 0$  para  $t \leq 0$  e  $f(t) = t$  para  $t \geq 0$ , temos que  $\|f\| = 1$  e  $f^{*!}f = 0$ .
- Na álgebra convolutiva  $A = l^1(\mathbb{Z})$ , considere a norma definida por  $\|c\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|$  e a involução definida por  $c^{*!}(n) = \overline{c(-n)}$ . Então  $A$  também é uma álgebra de Banach com uma involução tal que  $\|c^{*!}\|_1 = \|c\|_1$  para todo  $c \in A$ . Mas  $A$  não é uma álgebra- $C^*$ ; de fato, para  $c$  definida por  $c(1) = c(0) = -c(-1) = 1$  e  $c(n) = 0$  quando  $|n| \geq 2$ , temos que  $\|c\|_1 = 3$  e  $\|c^{*!}c\|_1 = 3$ .

### 1.3.2 Espectro de um elemento numa álgebra de Banach

Alguns dos resultados da teoria espectral são gerais, sendo válidos para qualquer álgebra de Banach, outros são específicos de álgebras- $C^*$ . Na presente subseção, consideramos uma álgebra de Banach  $A$  com unidade. O espectro de  $a$  pode ser considerado como o conjunto de “autovalores generalizado” de  $a$  pois qualquer autovalor verdadeiro de  $a$  está no espectro.

**Definição 1.46** Para cada  $a \in A$ , o **espectro** de  $a$  é o subconjunto

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda 1 - a \quad \text{não é invertível em } A\}$$

do plano complexo.

A partir do próximo lema vamos definir o raio espectral de um elemento numa álgebra de Banach.

**Lema 1.47** Para cada  $a \in A$ , a sequência  $\left(\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|.$$

**Demonstração.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina  $\alpha_n = \log \|a^n\|$ , tem-se que  $\|a^{p+q}\| \leq \|a^p\| \|a^q\|$ . Assim,

$$\alpha_{p+q} \leq \alpha_p + \alpha_q$$

para cada  $p, q \geq 1$ . Logo, a sequência subaditiva  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para o seu mínimo. Vejamos a prova.

Escolha um inteiro  $q \geq 1$ , escreva cada inteiro  $n \in \mathbb{N}$  como  $n = kq + r$  com  $k \geq 0$  e  $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ . Tem-se

$$\frac{\alpha_n}{n} = \frac{\alpha_{kq+r}}{kq+r} \leq \frac{\alpha_{kq} + \alpha_r}{kq+r} \leq \frac{\alpha_{kq}}{kq} + \frac{\alpha_r}{kq} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\alpha_r}{kq}.$$

Segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q}.$$

Como temos obviamente que  $\inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n}$ , também temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q}$$

ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|$ . □

**Definição 1.48** O **raio espectral** de  $a \in A$  é o número real

$$\rho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Equivalentemente,  $\rho(a)^{-1}$  é o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n$ . Note que  $\rho(a) \leq \|a\|$ .

**Lema 1.49** *Seja  $a \in A$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , então temos que*

1. Se  $|\lambda| < \rho(a)^{-1}$ , o elemento  $1 - \lambda a$  é invertível em  $A$ .
2. Se  $|\lambda| > \rho(a)$ , então  $\lambda \notin \sigma(a)$ .
3. O conjunto  $A^{\text{inv}}$  de elementos invertíveis em  $A$  é aberto e a função

$$\begin{cases} A^{\text{inv}} & \longrightarrow & A^{\text{inv}} \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{cases}$$

é contínua.

**Demonstração.** (1) Se  $\rho(\lambda a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^n a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\lambda|^n \|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \rho(a) < 1$ . Segue da definição (1.48) que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n$  é convergente e seu limite é  $(1 - \lambda a)^{-1}$  o que implica  $1 - \lambda a$  é invertível em  $A$ .

(2) Se  $|\lambda| > \rho(a)$ , ou seja,  $|\lambda|^{-1} < \rho(a)^{-1}$  o item anterior implica que  $\lambda 1 - a = \lambda(1 - (\lambda)^{-1}a)$  é invertível. Disso, obtemos que  $\lambda \notin \sigma(a)$ .

(3) Seja  $a \in A^{\text{inv}}$ , para cada  $b \in A$  tal que  $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$  o elemento

$$b = a(1 - a^{-1}(a - b))$$

está em  $A^{\text{inv}}$  pois  $\rho(a^{-1}(a - b)) \leq \|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\| \|a - b\| < 1$ . Logo,  $A^{\text{inv}}$  é aberto.

Se  $\|b - a\| < \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-2} \varepsilon$  temos que

$$\begin{aligned} \|b^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1} - a^{-1} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}(a - b)\|^n \|a^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a - b\|}{1 - \|a^{-1}(a - b)\|} \\ &\leq 2 \|a^{-1}\|^2 \|a - b\| \\ &\leq 2 \|a^{-1}\|^2 \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-2} \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, a função  $a \mapsto a^{-1}$  é contínua em  $A^{\text{inv}}$ . □

Na seguinte proposição damos uma espécie de generalização da definição de raio espectral que já conhecemos e é dada por  $\rho(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$ .

**Proposição 1.50** *Para cada  $a \in A$ , o espectro  $\sigma(a)$  é um subconjunto compacto não vazio de  $\mathbb{C}$  que está contido no disco fechado de raio  $\rho(a)$  centrado na origem, e obviamente no disco fechado de raio  $\|a\|$  ao redor da origem.*

Além disso, o raio espectral de  $a$  é dado por

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

**Demonstração.** O segundo item do lema (1.49) mostra que  $\sigma(a)$  está contido no disco fechado de raio  $\rho(a)$  ao redor da origem, e o último item mostra em particular que  $\sigma(a)$  é fechado em  $\mathbb{C}$ . Assim, o espectro  $\sigma(a)$  é compacto.

O último item do lema (1.49) também mostra que  $(\lambda 1 - a)^{-1}$  está dado ao redor de qualquer  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  por uma série inteira em  $\lambda - \lambda_0$ , isto é, que a **resolvente** de  $a$

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \sigma(a) & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda 1 - a)^{-1} \end{cases}$$

é uma função analítica. Se  $\sigma(a)$  for vazio, a resolvente seria uma função holomorfa, limitada, não constante definida em todo  $\mathbb{C}$ , em contradição com o teorema de Liouville. Logo, o espectro  $\sigma(a)$  é não vazio.

Se  $\rho(a) = 0$ , é claro que  $\sigma(a) = \{0\}$ . Suponha agora que  $\rho(a) \neq 0$ . Se o espectro  $\sigma(a)$  estiver contido em algum disco fechado centrado na origem de raio  $r < \rho(a)$ , a resolvente  $\lambda \mapsto (\lambda 1 - a)^{-1} = \lambda^{-1} (1 - \lambda^{-1}a)^{-1}$  seria analítica no domínio definido por  $|\lambda| > r$ . Então a função  $z \mapsto (1 - za)^{-1}$  seria definida e analítica no disco aberto de raio  $r^{-1}$  ao redor de 0 e sua série de Taylor na origem  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n$  teria raio de convergência  $r^{-1} > \rho(a)^{-1}$ , contradizendo a definição de  $\rho(a)$ , assim a prova está completa.  $\square$

A figura (1.1) ilustra geometricamente a proposição (1.50).

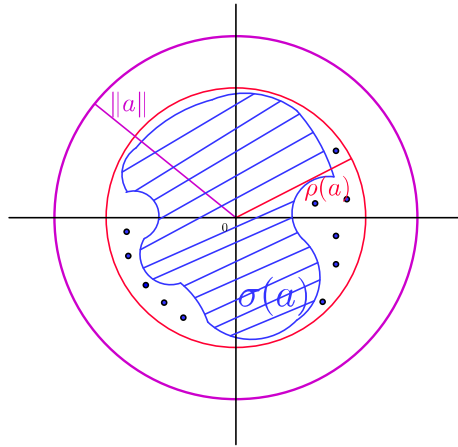


Figura 1.1: O espectro de um operador  $a$  é um subconjunto compacto contido no disco fechado de raio  $\rho(a)$  centrado na origem, o qual está contido no disco fechado de raio  $\|a\|$  centrado na origem. A região hachurada é o espectro contínuo e os pontos são o espectro discreto.

**Teorema 1.51 (Teorema de Gelfand-Mazur (1938))** *Uma álgebra de Banach com unidade na qual todos os elementos diferentes de zero são invertíveis é isomorfa ao corpo de números complexos.*

**Demonstração.** Para cada  $a$  numa tal álgebra de Banach  $A$ , existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\lambda 1 - a$  não é invertível ( $\sigma(a) \neq \emptyset$ ), assim por hipótese  $\lambda 1 - a = 0$ , ou  $a \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Exemplo 1.52**

Seja  $e \in A$  um elemento idempotente, isto é,  $e^2 = e$ . Então o espectro de  $e$  está contido em  $\{0, 1\}$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , a resolvente de  $e$  está dada por

$$(\lambda 1 - e)^{-1} = \frac{1 - \lambda 1 - e}{\lambda(1 - \lambda)}.$$

Seja  $a \in A$  um elemento tal que  $a^n = 1$  para algum inteiro  $n \geq 2$ . Denote por  $C_n$  o grupo cíclico de raízes  $n$ -ésimas de 1. Para cada  $\lambda \in C_n$ , defina

$$p_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j \leq n-1} \lambda^{-j} a^j \in A.$$

Então se pode verificar que

$$\begin{aligned} p_\lambda p_\mu &= \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda \quad \text{para todo } \lambda, \mu \in C_n, \\ \sum_{\lambda \in C_n} p_\lambda &= 1, \\ \sum_{\lambda \in C_n} \lambda p_\lambda &= a. \end{aligned}$$

Segue que

$$(z1 - a)^{-1} = \sum_{\lambda \in C_n} \frac{1}{z - \lambda} p_\lambda$$

para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus C_n$ , e que o espectro de  $a$  está contido em  $C_n$ .

### Exemplo 1.53 (Espectro do operador multiplicação)

Seja  $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  uma sequência limitada de números complexos e seja  $M_c$  o operador multiplicação correspondente em  $\ell^2$ . Então o espectro de  $M_c$  é o fecho em  $\mathbb{C}$  do conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}; \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } z = c_n\}.$$

Em particular, como os pontos de coordenadas racionais de  $\mathbb{C}$  são densos então qualquer subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$  é o espectro de algum operador limitado em  $\ell^2$ .

Mais geralmente, sejam  $(X, \mu)$  um espaço mensurável e  $f \in L^\infty(X, \mu)$ . O espectro do operador multiplicação  $M_f$  em  $L^2(X, \mu)$  é o fecho da imagem essencial

$$\{z \in \mathbb{C}; \mu(f^{-1}(\nu)) > 0 \text{ para toda vizinhança } \nu \text{ de } z \text{ em } \mathbb{C}\}$$

de  $f$ . Para mais detalhes, ver problemas 48 ao 52 em [13].

**Lema 1.54 (Teorema da aplicação espectral)** *Seja um polinômio  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$  definido para  $\lambda$  em  $\mathbb{C}$ . Para  $a \in A$  definimos  $f(a) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n \in A$ . Então*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

para todo  $a \in A$ , onde  $f(\sigma(a)) := \{f(\lambda); \lambda \in \sigma(a)\}$ .



**Demonstração.** O lema é válido para polinômios constantes porque o espectro é não vazio pela proposição (1.50), portanto podemos supor que  $f$  não é constante. Na prova a seguir usaremos repetidamente o seguinte fato: se  $a$  é um produto  $a_1 \dots a_n$  de fatores comutantes na álgebra, então  $a$  é invertível se, e somente, se cada  $a_j$  é invertível.

Seja  $\lambda_0 \in \sigma(a)$ , o polinômio  $f(\lambda) - f(\lambda_0)$  tem  $\lambda_0$  como raiz. Logo,  $f(\lambda) - f(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$  onde  $g$  é um polinômio de grau  $n - 1$ . Como  $a - \lambda_0 1$  não é invertível,

$$f(a) - f(\lambda_0)1 = (a - \lambda_0 1)g(a)$$

não é invertível. Assim,  $f(\lambda_0) \in \sigma(f(a))$ .

Seja  $\mu_0 \in \sigma(f(a))$ , e sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  as  $n$  raízes do polinômio  $f(\lambda) - \mu_0$  em  $\mathbb{C}$  e como  $a_n \neq 0$  temos que  $f(\lambda) - \mu_0 = a_n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$  o que implica

$$f(a) - \mu_0 1 = a_n(a - \lambda_1 1) \dots (a - \lambda_n 1).$$

Como  $f(a) - \mu_0 1$  não é invertível, existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a - \lambda_j 1$  não é invertível. Como  $f(\lambda_j) = \mu_0$ , isto mostra que  $\mu_0 \in f(\sigma(a))$ .  $\square$

### 1.3.3 Espectro de um elemento numa álgebra- $C^*$

A proposição que segue nos permite localizar com mais precisão o espectro de operadores autoadjuntos e unitários. Seja  $\mathcal{A}$  um álgebra- $C^*$  com unidade e denotemos por  $\mathbb{T}$  o círculo unitário do plano complexo.

#### Proposição 1.55

1. Para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\sigma(a^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C}; \lambda \in \sigma(a)\}$ .
2. Se  $a \in \mathcal{A}$  é autoadjunto, seu espectro está em  $\mathbb{R}$ .
3. Se  $u \in \mathcal{A}$  é unitário, seu espectro está em  $\mathbb{T}$ .

**Demonstração.** (1) Para  $\lambda \in \mathbb{C}$ , o elemento  $\bar{\lambda}1 - a^*$  é invertível (digamos com inversa  $b$ ) se e somente se  $\lambda 1 - a$  é invertível (com inversa  $b^*$ ).

(2) Seja  $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$  o número  $x + i(y + t)$  está em  $\sigma(a + it1)$ . Como  $a$  é autoadjunto obtemos que

$$\|a + it1\|^2 = \|(a + it1)(a - it1)\| = \|a^2 + t^2 1\| \leq \|a\|^2 + t^2,$$

portanto a proposição (1.50) implica que

$$|x + i(y + t)|^2 = x^2 + (y + t)^2 \leq \|a + it1\|^2 \leq \|a\|^2 + t^2$$

e esta desigualdade também pode ser escrita como

$$2yt \leq \|a\|^2 - x^2 - y^2.$$

Como isto é válido para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $y = 0$ . Logo,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(3) Seja  $\lambda \in \sigma(u)$ . Observe que  $\lambda \neq 0$ , pois  $u$  é invertível, e que  $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ , porque  $\lambda^{-1}1 - u^{-1} = -\lambda^{-1}(\lambda 1 - u)u^{-1}$  não é invertível. Pela proposição (1.50) obtemos que

$$|\lambda| \leq \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{|\lambda|} = |\lambda^{-1}| \leq \|u^{-1}\| = 1$$

e por conseguinte  $\lambda \in \mathbb{T}$ . □

### Corolário 1.56

1. Seja  $a \in \mathcal{A}$  um elemento normal. Então

$$\rho(a) = \|a\|.$$

Em particular, se  $a \in \mathcal{A}$  é autoadjunto, então ao menos um destes números  $\|a\|$ ,  $-\|a\|$  está no espectro  $\sigma(a)$ .

2. Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e seja  $a \in B(\mathcal{H})$  um elemento autoadjunto. Defina

$$m(a) = \inf_{\substack{\xi \in \mathcal{H} \\ \|\xi\| \leq 1}} \langle a\xi, \xi \rangle \quad \text{e} \quad M(a) = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{H} \\ \|\xi\| \leq 1}} \langle a\xi, \xi \rangle,$$

então  $\sigma(a) \subset [m(a), M(a)]$ .

**Demonstração.** (1) Suponha primeiro que  $a$  é autoadjunto. Da definição de álgebras- $C^*$  temos

$$\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$$

para todo  $k \geq 0$ , assim

$$\rho(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{2^k}\|^{2^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \|a\|^{2^k} \right)^{2^{-k}} = \|a\|.$$

Segue das proposições (1.50) e (1.55)(2) que ao menos um dos números  $\|a\|$ ,  $-\|a\|$  está em  $\sigma(a)$ .

Agora suponha que  $a$  é normal. Então

$$\begin{aligned} \rho(a^2) &\leq \|a^2\| && \text{por lema (1.47)} \\ &\leq \|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) && \text{pelo argumento anterior} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*a)^n\|^{\frac{1}{n}} && \text{por definição de } \rho \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n a^n\|^{\frac{1}{n}} && \text{porque } a \text{ é normal} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \rho(a^*)\rho(a) && \text{por definição de } \rho \\ &= \rho(a)^2 && \text{por proposição (1.55)(1)} \\ &= \rho(a^2) && \text{por lema (1.54).} \end{aligned}$$

Logo, todas as desigualdades são igualdades, e  $\rho(a)^2 = \|a\|^2$ .

(2) Lembre da proposição (1.21) que  $\|a\| = \max \{-m(a), M(a)\}$ . Defina

$$\lambda = \frac{1}{2}(M(a) + m(a)) \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{2}(M(a) - m(a)),$$

assim  $m(a - \lambda 1) = -r$  e  $M(a - \lambda 1) = r$ . Temos que  $\|a - \lambda 1\| = r$  pela proposição (1.21) e que  $\sigma(a - \lambda 1) \subset [-r, r]$  pelas proposições (1.50) e (1.55), e finalmente  $\sigma(a) \subset [m(a), M(a)]$  por um caso trivial do lema (1.54).  $\square$

**Corolário 1.57** *Para qualquer  $a \in \mathcal{A}$ , tem-se que*

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a).$$

**Demonstração.** Pela definição de álgebra- $C^*$   $\|a\|^2 = \|a^*a\|$  e como  $a^*a$  é autoadjunto pela proposição anterior  $\|a^*a\| = \rho(a^*a)$ . Logo,  $\|a\|^2 = \rho(a^*a)$ .  $\square$

Há um procedimento muito importante para aplicação de funções a operadores chamado cálculo funcional. Polinômios com coeficientes complexos podem ser aplicados a qualquer operador de uma forma óbvia. Para operadores autoadjuntos e, mais geralmente, para operadores normais, este cálculo funcional pode ser definido para funções contínuas. O cálculo funcional será de grande utilidade na primeira seção do capítulo 2.

**Teorema 1.58 (Cálculo funcional contínuo para operadores limitados autoadjuntos)** *Seja  $A$  uma álgebra com unidade, seja  $a \in A$  um elemento autoadjunto, e seja  $\mathcal{C}(\sigma(a))$  a álgebra- $C^*$  de funções contínuas no espectro de  $a$ . Então existe um único morfismo de álgebras- $C^*$*

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\sigma(a)) & \longrightarrow & A \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

*que leva a função constante 1 (respectivamente a inclusão de  $\sigma(a)$  em  $\mathbb{C}$ ) ao operador  $id_{\mathcal{H}}$  (respectivamente a  $a$ ). Além disso, temos que*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

*para todo  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ .*

**Demonstração.** Denotemos por  $\mathcal{P}(\sigma(a))$  a subálgebra involutiva de  $\mathcal{C}(\sigma(a))$  que consiste das restrições a  $\sigma(a)$  das funções polinômiais  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , e  $\mathbb{C}[a]$  a subálgebra involutiva de  $A$  que consiste dos elementos  $f(a)$  com  $f \in \mathbb{C}[\lambda]$  um polinômio complexo de uma variável. Uma consequência direta do lema (1.54) e do corolário (1.56) é que  $\|f(a)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |f(\lambda)| = \|f\|$  para todo  $f \in \mathbb{C}[\lambda]$ , isto é, que o morfismo óbvio

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\sigma(a)) & \longrightarrow & \mathbb{C}[a] \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

está bem definido e é uma isometria. Pelo teorema de aproximação de Weierstrass, esta tem uma extensão isométrica de  $\mathcal{C}(\sigma(a))$  à subálgebra- $C^*$   $C^*(a)$  de  $A$  gerada por  $a$  (a qual também é o fecho de  $\mathbb{C}[a]$  em  $A$ ). Fixemos agora uma função  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$  e verifiquemos que  $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ .

Considere primeiro  $\mu \in f(\sigma(a))$ . Escolha  $\lambda \in \sigma(a)$  tal que  $\mu = f(\lambda)$ . Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathcal{P}(\sigma(a))$  com limite  $f$ . Então  $(f_n(\lambda)1 - f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\mu 1 - f(a)$ . Como  $f_n(\lambda)1 - f_n(a)$  não é invertível para cada  $n \in \mathbb{N}$  pelo lema (1.54),

segue do lema (1.49)(3) (o conjunto dos elementos não invertíveis em  $A$  é fechado) que  $\mu \in \sigma(f(a))$ . Portanto,  $f(\sigma(a)) \subset \sigma(f(a))$ .

Considere agora  $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(a))$ . A função  $g$  definida por  $g(t) = (\mu - f(t))^{-1}$  está em  $\mathcal{C}(\sigma(a))$  e  $g(a) = (\mu 1 - f(a))^{-1}$ , assim que  $\mu \notin \sigma(f(a))$ . Logo,  $\sigma(f(a)) \subset f(\sigma(a))$ .

□

**Corolário 1.59** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  álgebras- $C^*$  com unidade e seja  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  um morfismo. Então*

$$\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ .

**Demonstração.** Para cada  $x \in \mathcal{A}$ , obviamente temos que  $\sigma(\Phi(x)) \subset \sigma(x)$ . No caso,  $x = a^*a$  para algum  $a \in \mathcal{A}$ , isto implica

$$\begin{aligned} \|\Phi(a)\|^2 = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\| &= \|\Phi(a^*)\Phi(a)\| \\ &= \|\Phi(a^*a)\| \\ &= \|\Phi(x)\| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\Phi(x))} |\lambda| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \\ &= \|x\| \\ &= \|a^*a\| \\ &= \|a\|^2. \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.60** *Seja  $\mathcal{B}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade. Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  uma sub-álgebra- $C^*$  que contém a unidade e  $a \in \mathcal{B}$ . Então  $a$  é invertível em  $\mathcal{A}$  se e somente se é invertível em  $\mathcal{B}$ . Mais geralmente, os espectros*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda 1 - a \text{ não é invertível em } \mathcal{A}\}$$

e

$$\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda 1 - a \text{ não é invertível em } \mathcal{B}\}$$

coincidem.

**Demonstração.** É imediato que  $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ . Agora seja  $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$  um ponto fronteira de  $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ . Afirmamos que  $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ . De fato, seja  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$  que converge para  $\lambda$ . Defina  $x_n = (\lambda_n 1 - a)^{-1} \in \mathcal{A}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\lambda 1 - a$  for invertível em  $\mathcal{B}$ , digamos com inversa  $x$ , então  $x$  seria o limite da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pelo lema (1.49)(3), assim  $x$  seria uma inversa de  $\lambda 1 - a$  em  $\mathcal{A}$ , em contradição com a hipótese de que  $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ . Isto prova que  $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(a)$  como afirmamos. Pelo argumento até agora, é suficiente assumir que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são álgebras de Banach com unidade, elas não precisam ser álgebras- $C^*$ .

Em particular, se  $a \in \mathcal{A}$  é autoadjunto, todos os pontos em  $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$  são pontos fronteira pois  $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{R}$  pela proposição (1.55)(2) e portanto  $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ .

Seja  $a \in \mathcal{A}$  um elemento arbitrário e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Se  $\lambda 1 - a$  é invertível em  $\mathcal{B}$ , então  $(\bar{\lambda} 1 - a^*)(\lambda 1 - a)$  e  $(\lambda 1 - a)(\bar{\lambda} 1 - a^*)$  são elementos autoadjuntos em  $\mathcal{A}$  os quais são invertíveis em  $\mathcal{B}$ . Assim, eles são invertíveis em  $\mathcal{A}$  pelo argumento prévio. Logo,  $\lambda 1 - a$  tem inversa pela direita e pela esquerda, em consequência é invertível em  $\mathcal{A}$ . Disto segue que  $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ .  $\square$

**Corolário 1.61 (Corolário sobre decomposição polar)** *Sejam  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  dois espaços de Hilbert e seja  $a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  um operador limitado. Então existe um par  $(w, p)$  onde  $w$  é uma isometria parcial de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}'$  e  $p$  é um operador positivo em  $\mathcal{H}$  tal que  $a = wp$ .*

*Além disso, existe um único par  $(w, p)$  tal que  $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(p)$ , e satisfaz  $a^*a = p^2$ . Este é chamado a **decomposição polar** de  $a$ .*

**Observação 1.62** *No caso em que  $a \in B(\mathcal{H})$  o operador positivo  $p$  tem a forma  $p = \sqrt{a^*a}$  e nesse caso denotaremos  $p = |a|$  e o operador  $w$  é unitário. Quando  $a$  é invertível a decomposição polar é única e se além disso  $a$  é normal a decomposição polar pela esquerda e pela direita são as mesmas.*

### 1.3.4 Teorema de Gelfand-Naimark

**Definição 1.63** *Seja  $A$  uma álgebra comutativa complexa. Um **carater** em  $A$  é uma função linear  $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$  diferente de zero tal que*

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

*para todo  $a, b \in A$ . O conjunto de todos os carateres em  $A$  é denotado por  $X(A)$ .*

Se  $A$  tem uma unidade, observe que  $\chi(1) = 1$  para qualquer  $\chi \in X(A)$ .

Se  $A$  é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, qualquer carater  $\chi$  em  $A$  satisfaz

$$\sup_{\substack{a \in A \\ \|a\| \leq 1}} |\chi(a)| \leq 1 \quad (1.1)$$

para todo  $a \in A$ , e em particular qualquer carater em  $A$  é contínuo. De fato, para um tal  $\chi$  e para todo  $a \in A$ , temos obviamente que  $\chi(a) \in \sigma(a)$ , assim  $|\chi(a)| \leq \|a\|$  pela proposição (1.50). Se além disso  $A$  é uma álgebra- $C^*$  comutativa com unidade, qualquer carater  $\chi$  em  $A$  também satisfaz

$$\chi(a^*) = \overline{\chi(a)} \quad (1.2)$$

para todo  $a \in A$ . Com efeito, se  $a^* = a$  então  $\chi(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$  pela proposição (1.55)(2). Assim, para qualquer  $a \in A$ , temos

$$\chi(a^*) = \chi\left(\frac{a + a^*}{2} + i\frac{ia - ia^*}{2}\right) = \chi\left(\frac{a + a^*}{2}\right) + i\chi\left(\frac{ia - ia^*}{2}\right) = \overline{\chi(a)}$$

como afirmamos em (1.2).

Para qualquer álgebra comutativa complexa  $A$ , define-se em  $X(A)$  a topologia de convergência pontual. Se  $A$  é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, (1.1) mostra que existe uma injeção natural de  $X(A)$  no produto de cópias do disco unitário fechado indexado pela bola unitária de  $A$ ; segue essencialmente do teorema de Tychonoff que  $X(A)$  é um espaço compacto. A **transformação de Gelfand** é o homomorfismo

$$\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}_0(X(A)) \quad (1.3)$$

definido por  $\mathcal{G}(a)(\chi) = \chi(a)$  para todo  $a \in A$  e  $\chi \in X(A)$ .

**Lema 1.64** *Seja  $A$  uma álgebra de Banach comutativa com unidade e seja  $\mathcal{G} : A \rightarrow \mathcal{C}(X(A))$  a transformação Gelfand correspondente. Então*

$$\sigma(\mathcal{G}(a)) = \sigma(a)$$

para todo  $a \in A$ .

**Demonstração.** Seja  $\lambda \in \sigma(\mathcal{G}(a))$ , então existe  $\chi \in X(A)$  tal que

$$(\lambda 1 - \mathcal{G}(a))(\chi) = \chi(\lambda 1 - a) = 0.$$

Assim,  $\lambda 1 - a$  não é invertível e  $\lambda \in \sigma(a)$ .

Seja  $\lambda \in \sigma(a)$ , pelo lema de Zorn existe um ideal maximal  $\tau$  em  $A$  que contém  $\lambda 1 - a$ ; observe que  $\tau$  é fechado em  $A$  (ver lema (1.49)(2)). Então  $A/\tau$  é uma álgebra de Banach e um corpo, portanto é isomorfo ao corpo dos números complexos pelo teorema de Gelfand Mazur. A projeção canônica  $A \rightarrow A/\tau$  pode ser vista como um caráter  $\chi \in X(A)$  tal que  $\chi(\lambda 1 - a) = 0$ . Logo,  $(\lambda 1 - \mathcal{G}(a))(\chi) = 0$ , e  $\lambda \in \sigma(\mathcal{G}(a))$ .  $\square$

**Teorema 1.65 (Teorema de Gelfand-Naimark (1943))** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  comutativa. Então a transformação Gelfand*

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}_0(X(\mathcal{A}))$$

*definida em (1.3) é um isomorfismo isométrico com a norma do lado direito como no exemplo (1.44).*

**Demonstração.** A imagem de  $\mathcal{G}$  separa pontos de  $X(\mathcal{A})$ ; de fato, se  $\chi_1, \chi_2 \in X(\mathcal{A})$  são caracteres diferentes, existe  $a \in \mathcal{A}$  tal que  $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$ , isto é, tal que  $\mathcal{G}(a)(\chi_1) \neq \mathcal{G}(a)(\chi_2)$ . Observe também que

$$\mathcal{G}(a^*) = \mathcal{G}(a)^*$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$  por (1.2).

Vejamos que  $\mathcal{G}$  é um isomorfismo, sejam  $a, b \in \mathcal{A}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(ab)(\chi) = \chi(ab) &= \chi(a)\chi(b) \\ &= \mathcal{G}(a)(\chi)\mathcal{G}(b)(\chi) \\ &= (\mathcal{G}(a)\mathcal{G}(b))(\chi) \end{aligned}$$

para todo  $\chi \in X(\mathcal{A})$ . Assim,  $\mathcal{G}(ab) = \mathcal{G}(a)\mathcal{G}(b)$  para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Agora mostremos que  $\mathcal{G}(a)$  é normal para todo  $a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(a)\mathcal{G}(a)^* &= \mathcal{G}(a)\mathcal{G}(a^*) = \mathcal{G}(aa^*) & \mathcal{G} & \text{ é um isomorfismo} \\ &= \mathcal{G}(a^*a) & \mathcal{A} & \text{ é comutativa} \\ &= \mathcal{G}(a^*)\mathcal{G}(a) \\ &= \mathcal{G}(a)^*\mathcal{G}(a). \end{aligned}$$

Provemos que  $\mathcal{G}$  é uma isometria

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(a)\|^2 &= \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\mathcal{G}(a)(\chi)|^2 = \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\chi(a)|^2 = \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\overline{\chi(a)}| |\chi(a)| \\ &= \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\chi(a^*)| |\chi(a)| \\ &= \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\chi(a^*a)| \\ &= \sup_{\chi \in X(\mathcal{A})} |\mathcal{G}(a^*a)(\chi)| \\ &= \|\mathcal{G}(a^*a)\| \\ &= \rho(\mathcal{G}(a^*a)) & \text{ pelo corolário (1.56)(1)} \\ &= \rho(a^*a) & \text{ pelo lema (1.64)} \\ &= \|a\|^2 & \text{ pelo corolário (1.57)} \end{aligned}$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$  e isto finaliza a prova.  $\square$

**Corolário 1.66** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  comutativa com unidade e seja  $a \in \mathcal{A}$ . Suponha que  $a$  gera  $\mathcal{A}$ . Então a função*

$$\begin{cases} X(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \sigma(a) \\ \chi & \longmapsto & \chi(a) \end{cases}$$

*é um homeomorfismo.*

**Demonstração.** A função é contínua e sua imagem é  $\sigma(a)$  pela prova do lema (1.64). Para mostrar que a função é injetiva, considere  $\chi_1, \chi_2 \in X(\mathcal{A})$  tal que  $\chi_1(a) = \chi_2(a)$ . O conjunto  $\{b \in \mathcal{A}; \chi_1(b) = \chi_2(b)\}$  é uma sub-álgebra- $C^*$  de  $\mathcal{A}$  que contém a unidade, este é portanto o próprio  $\mathcal{A}$ , e  $\chi_1 = \chi_2$ . Assim, a função é um homeomorfismo.  $\square$

**Teorema 1.67 (Cálculo funcional contínuo para operadores normais)** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade, seja  $a \in \mathcal{A}$  um elemento normal e seja  $C^*(a)$  a subálgebra- $C^*$  de  $\mathcal{A}$  gerada por  $a$ . Então existe um único morfismo de álgebras- $C^*$*

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\sigma(a)) & \longrightarrow & C^*(a) \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

*tal que  $1(a) = 1$  e  $i(a) = a$  (onde  $i \in \mathcal{C}(\sigma(a))$  denota a inclusão de  $\sigma(a)$  em  $\mathbb{C}$ ). Além disso, tem-se que*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

*para todo  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ .*

**Demonstração.** O espaço dos polinômios em  $z$  e  $\bar{z}$  é denso em  $\mathcal{C}(\sigma(a))$ . Como qualquer morfismo  $\mathcal{C}(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$  é contínuo pelo corolário (1.59), obtem-se a unicidade.

Denotemos por  $X$  o espectro da álgebra  $C^*(a)$  e denotemos por

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}(X) \rightarrow C^*(a)$$

o isomorfismo de Gelfand do teorema de Gelfand- Naimark. Pelo corolário (1.66) podemos identificar  $X$  com  $\sigma(a)$ , e isto mostra a existência do morfismo  $\mathcal{C}(\sigma(a)) \rightarrow C^*(a)$ .

Seja  $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ , tem-se  $f(a) = \mathcal{G}(f)$ . O espectro de  $f(a)$  em  $\mathcal{A}$  coincide com o espectro de  $f(a)$  em  $C^*(a)$  pela proposição (1.60). Assim, o espectro de  $f$  está em  $\mathcal{C}(\sigma(a))$  pois  $\mathcal{G}$  é um isomorfismo, portanto está em  $f(\sigma(a))$  pelo exemplo (1.53).  $\square$

**Lema 1.68** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  álgebras- $C^*$  comutativas com unidade, seja  $\Phi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  um morfismo injetivo tal que  $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$  e seja  $\phi : X(\mathcal{B}) \rightarrow X(\mathcal{A})$  a função definida nos espaços carater por  $\phi(\chi) = \chi \circ \Phi$  para todo  $\chi \in X(\mathcal{B})$ . Então  $\phi$  é contínua e sobrejetiva.*

**Demonstração.** A continuidade de  $\phi$  é uma consequência imediata da continuidade de  $\Phi$ , provada no corolário (1.59). Então a imagem de  $\phi$  é um subconjunto compacto de  $X(\mathcal{A})$ , digamos  $K$ .

Suponha por absurdo que  $\phi$  não é sobrejetiva. Identificando  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}(X(\mathcal{A}))$ , podemos escolher funções contínuas  $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(X(\mathcal{A}))$  tal que  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2(x) = 1$  para todo  $x \in K$  e  $a_1 a_2 = 0$ . Então  $\chi(\Phi(a_2)) = 1$  para todo  $\chi \in X(\mathcal{B})$ , o qual implica que  $\Phi(a_2)$  é invertível em  $\mathcal{B}$ . Mas isto é absurdo porque  $\Phi(a_1) \neq 0$  pela injetividade de  $\Phi$  e  $\Phi(a_1)\Phi(a_2) = 0$ .  $\square$

**Proposição 1.69** *Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  álgebras- $C^*$  com unidade e seja  $\Phi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  um morfismo injetivo. Então*

$$\|\Phi(a)\| = \|a\|$$

*para todo  $a \in \mathcal{A}$ . Em particular, a imagem de  $\Phi$  é fechada em  $\mathcal{B}$ , e é realmente uma sub-álgebra- $C^*$  de  $\mathcal{B}$ .*

**Demonstração.** Suponha primeiro que  $a^* = a$ . Restringindo  $\Phi$  à sub-álgebra- $C^*$  de  $\mathcal{A}$  gerada por  $a$ , pode-se assumir que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são ambas comutativas. Denotemos por  $X$  o espaço carater de  $\mathcal{A}$ , por  $Y$  o espaço carater de  $\mathcal{B}$  e por  $\phi : Y \rightarrow X$  a função restrição do lema anterior. Para todo  $a \in \mathcal{A}$ , tem-se que

$$\|a\| = \sup_{\chi \in X} |\chi(a)| = \sup_{\psi \in Y} |\phi(\psi)(a)| = \sup_{\psi \in Y} |\psi(\Phi(a))| = \|\Phi(a)\|.$$

Voltando para o caso geral de um elemento  $a$  não necessariamente autoadjunto, temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(a)\| &= \sqrt{\|\Phi(a)^* \Phi(a)\|} = \sqrt{\|\Phi(a^*) \Phi(a)\|} = \sqrt{\|\Phi(a^* a)\|} \\ &= \sqrt{\|a^* a\|} \\ &= \|a\|. \end{aligned}$$

$\square$



### 1.3.5 Elementos positivos de álgebras- $C^*$

**Definição 1.70** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$ , um elemento  $a \in \mathcal{A}$  é dito **positivo** se é autoadjunto e satisfaz  $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$ , ou seja,  $\sigma(a) \subset [0, \|a\|]$ . Denotaremos por  $\mathcal{A}_+$  o conjunto de elementos positivos de  $\mathcal{A}$ .

**Proposição 1.71** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade.

1. Para um elemento autoadjunto  $a \in \mathcal{A}$  tal que  $\|a\| \leq 1$ , tem-se que

$$a \in \mathcal{A}_+ \iff \|1 - a\| \leq 1.$$

2. O conjunto  $\mathcal{A}_+$  é fechado no conjunto de elementos autoadjuntos de  $\mathcal{A}$  que denotaremos por  $\mathcal{A}_{sa}$ .

**Demonstração.** (1) Se  $a \in \mathcal{A}_+$ , temos que  $\sigma(a) \subset [0, \|a\|] \subset [0, 1]$ . Assim,  $\sigma(1 - a)$  está também em  $[0, 1]$ , logo  $\|1 - a\| \leq 1$  pelo corolário (1.56)(1).

Se  $\|1 - a\| \leq 1$ , tem-se que  $\sigma(a - 1) \subset [-1, 1]$  pelas proposições (1.50) e (1.55)(2). Então  $\sigma(a) = 1 + \sigma(a - 1) \subset [0, 2]$ .

(2) Para  $a \in \mathcal{A}_{sa}$  temos que  $a \in \mathcal{A}_+$  se e somente se  $\| \|a\| - a \| \leq \|a\|$  por (1), portanto  $\mathcal{A}_+$  é fechado em  $\mathcal{A}_{sa}$ .  $\square$

**Teorema 1.72** O conjunto  $\mathcal{A}_+$  de elementos positivos de uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  com unidade, é um cone convexo fechado em  $\mathcal{A}_{sa}$  e tem a propriedade  $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$ .

**Demonstração.**  $\mathcal{A}_+$  é fechado pela proposição (1.71)(2), e  $\lambda a$  obviamente está em  $\mathcal{A}_+$  sempre que  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  e  $a \in \mathcal{A}_+$ . Sejam  $a, b \in \mathcal{A}_+$  tais que  $\|a\| \leq 1$  e  $\|b\| \leq 1$ , tem-se  $\|1 - a\| \leq 1$  e  $\|1 - b\| \leq 1$  pela proposição (1.71)(1). Assim,

$$\left\| 1 - \frac{1}{2}(a + b) \right\| = \left\| \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \right\| \leq \frac{1}{2}\|1 - a\| + \frac{1}{2}\|1 - b\| \leq 1$$

e  $\frac{1}{2}(a + b) \in \mathcal{A}_+$  pelo mesmo lema. Seja  $a \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$ , então  $\sigma(a) = \{0\}$ , logo  $a = 0$  pelo corolário (1.56)(1).  $\square$

O próximo lema nos diz que o espectro de  $ab$  e o espectro de  $ba$  podem diferir apenas no conjunto  $\{0\}$ .

**Lema 1.73** Seja  $A$  uma álgebra complexa com unidade e sejam  $a, b \in A$ . Então

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}.$$

Em particular, se  $A$  é uma álgebra- $C^*$  e se  $b \in A$ , então  $\sigma(bb^*) \subset [0, \infty)$  se e somente se  $\sigma(b^*b) \subset [0, \infty)$ .

**Demonstração.** Seja  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda 1 - ab$  tem uma inversa, digamos  $x$ . Defina  $y = \lambda^{-1}(1 + bxa)$ . Então

$$\begin{aligned} (\lambda 1 - ba)y &= (\lambda 1 - ba)\lambda^{-1}(1 + bxa) = 1 + bxa - ba\lambda^{-1} - b\lambda^{-1}(abx)a \\ &= 1 + bxa - ba\lambda^{-1} - b\lambda^{-1}(\lambda x - 1)a \\ &= 1 \end{aligned}$$

e similarmente  $y(\lambda 1 - ba) = 1$ . Segue que  $\lambda 1 - ba$  é invertível com inversa  $y$ .  $\square$

A seguinte proposição fornece algumas condições equivalentes à positividade.

**Proposição 1.74** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}_{sa}$ , as três propriedades seguintes são equivalentes:*

1.  $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$ , isto é,  $a \in \mathcal{A}_+$ ,
2. existe  $b \in \mathcal{A}$  tal que  $a = b^*b$ ,
3. existe  $b \in \mathcal{A}_{sa}$  tal que  $a = b^2$ .

**Demonstração.** Seja  $a \in \mathcal{A}_{sa}$ . (3)  $\Rightarrow$  (1) segue da proposição (1.55)(2), a qual implica que  $\sigma(b) \subset \mathbb{R}$ , e do lema (1.54), tem-se que qualquer  $\mu \in \sigma(a)$  é da forma  $\mu = \lambda^2 \geq 0$  para algum  $\lambda \in \sigma(b)$ . (1)  $\Rightarrow$  (3) segue do teorema de cálculo funcional contínuo para operadores limitados autoadjuntos porque se pode definir  $b = \sqrt{a}$ . (3)  $\Rightarrow$  (2) é óbvia.

Finalmente provemos (2)  $\Rightarrow$  (3). Sejam  $f_+, f_- \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  definidas por

$$f_+ = \sup\{t, 0\} \quad f_- = \sup\{-t, 0\},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $a = b^*b$  como em (2), defina

$$\begin{aligned} a_+ &= f_+(a) \in \mathcal{A}_{sa} & a_- &= f_-(a) \in \mathcal{A}_{sa} \\ x_+ &= \sqrt{f_+(a)} \in \mathcal{A}_{sa} & x_- &= \sqrt{f_-(a)} \in \mathcal{A}_{sa} \end{aligned}$$

e observe que

$$a = a_+ - a_- = x_+^2 - x_-^2 \quad x_+x_- = 0$$

porque relações similares valem em  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ . Por outro lado, temos

$$-(x_-b^*)(x_-b^*)^* = -x_-ax_- = -x_-x_+^2x_- + x_-^4 = x_-^4 \in \mathcal{A}_+, \quad (1.4)$$

a inclusão vale porque (3)  $\Rightarrow$  (1). Por outra parte, escrevendo  $x_-b^* = s+it$  com  $s, t \in \mathcal{A}_{sa}$ , obtem-se

$$\begin{aligned} (x_-b^*)^*(x_-b^*) &= -(x_-b^*)(x_-b^*)^* + (s+it)(s-it) + (s-it)(s+it) \\ &= -(x_-b^*)(x_-b^*)^* + 2s^2 + 2t^2 \in \mathcal{A}_+, \end{aligned}$$

a inclusão vale porque  $-(x_-b^*)(x_-b^*)^* \in \mathcal{A}_+$ , como mostramos anteriormente, e porque  $2s^2 + 2t^2 \in \mathcal{A}_+$ . Segue do teorema (1.72) e do lema (1.73) que

$$(x_-b^*)(x_-b^*)^* \in \mathcal{A}_+. \quad (1.5)$$

Em consequência, (1.4) e (1.5) implicam que  $x_-^4 = 0$ , ou seja,  $x_- = 0$  e  $a = x_+^2$ .  $\square$

A noção de positividade em álgebras- $C^*$   $\mathcal{A}$ , discutida anteriormente, permite definir uma relação de ordem no conjunto  $\mathcal{A}_+$ .

**Definição 1.75** *Dada uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$ , se  $a, b$  são elementos autoadjuntos de  $\mathcal{A}$  dizemos que  $a \geq b$  se  $a - b \in \mathcal{A}_+$*

**Observação 1.76** *Dizemos que  $a \leq b$  se  $a - b \in -\mathcal{A}_+$ , ou seja, se  $b \geq a$ . Note que se  $a \geq b$  e  $a \leq b$  então  $a = b$  pois, como vimos no teorema anterior  $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$ .*

Note que nem todo elemento é comparável. A relação de ordem definida acima conduz a alguns resultados não triviais, como os expressos na proposição que segue.

**Proposição 1.77** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade e sejam  $a, b$  elementos autoadjuntos de  $\mathcal{A}$ . Então valem os seguintes resultados*

1. Se  $a \geq 0$ , então  $\|a\| 1 \geq a \geq 0$ .
2. Se  $a \geq b \geq 0$ , então  $\|a\| \geq \|b\|$ .
3. Se  $a \geq 0$ , então  $a \|a\| \geq a^2 \geq 0$ .

**Demonstração.** (1) Se  $a \geq 0$  então  $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$ . Logo, pelo lema (1.54),  $\sigma(\|a\| 1 - a) = \{\|a\| - \lambda; \lambda \in \sigma(a)\} \subset \{\|a\| - \lambda; \lambda \in [0, \|a\|]\} = [0, \|a\|]$ , provando que  $\|a\| 1 \geq a \geq 0$ .

(2) Se  $a \geq b \geq 0$ , então segue do item (1) e da transitividade da relação de ordem que  $\|a\| 1 \geq a \geq b \geq 0$ . Agora a relação  $\|a\| 1 \geq b$  e novamente o lema (1.54) implicam que  $[0, +\infty) \supset \sigma(\|a\| 1 - b) = \{\|a\| - \lambda; \lambda \in \sigma(b)\}$ . Porém isso só é possível se  $\|a\| \geq \sup_{\lambda \in \sigma(b)} \lambda = \sup_{\lambda \in \sigma(b)} |\lambda| = \rho(b) = \|b\|$ . Na primeira igualdade usamos a positividade de  $b$  e na última igualdade o fato de  $b$  ser autoadjunto.

(3) Se  $a \geq 0$ , então temos, de novo pelo lema (1.54) que

$$\sigma\left(\left(a - \frac{\|a\|}{2} 1\right)^2\right) = \left\{\left(\lambda - \frac{\|a\|}{2}\right)^2; \lambda \in \sigma(a)\right\} \subset \left\{\left(\lambda - \frac{\|a\|}{2}\right)^2; \lambda \in [0, \|a\|]\right\} = \left[0, \frac{\|a\|^2}{4}\right].$$

Logo,  $\rho\left(\left(a - \frac{\|a\|}{2} 1\right)^2\right) \leq \frac{\|a\|^2}{4}$ , implicando que  $\left\|\left(a - \frac{\|a\|}{2} 1\right)^2\right\| \leq \frac{\|a\|^2}{4}$ . Portanto, pelo item (1)  $\frac{\|a\|^2}{4} 1 \geq \left(a - \frac{\|a\|}{2} 1\right)^2$ . Expandindo o lado direito obtemos  $0 \geq a^2 - a \|a\|$ .  $\square$

## 1.4 Estados e construção GNS

A conexão entre álgebras- $C^*$  e espaços de Hilbert é feita via a noção de estado. A construção GNS foi descoberta independentemente por I.M. Gelfand e M.A. Naimark [12] e I. Segal [19], embora muito simples, é uma construção engenhosa e uma das ideias fundamentais da teoria de álgebras de operadores. Esta fornece um método para construir representações de álgebras- $C^*$ .

### 1.4.1 Estados

**Definição 1.78** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$ . Uma forma linear  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  é **positiva** se  $\phi(a^*a) \geq 0$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ .*

**Observação 1.79** *Para todo funcional linear  $\phi$  em  $\mathcal{A}$  existe uma forma sesquilinear associada  $(\cdot, \cdot)$  em  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , definida por  $(a, b) = \phi(b^*a)$ . Note que quando  $\phi$  é um funcional linear positivo sua forma sesquilinear associada é semi-definida positiva e portanto satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Em termos de  $\phi$  isto é*

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a) \quad (1.6)$$

para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ .

**Proposição 1.80** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade. Uma forma linear  $\phi$  em  $\mathcal{A}$  é positiva se, e somente, se é limitada e  $\|\phi\| = \phi(1)$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $\phi$  é positiva. Para cada  $a \in \mathcal{A}$  tem-se que  $\|a^*a\| 1 - a^*a \geq 0$  pela proposição (1.71), logo

$$\phi(a^*a) \leq \|a^*a\| \phi(1).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6), temos conseqüentemente

$$|\phi(a)| \leq \phi(1)^{\frac{1}{2}} \phi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \|a^*a\|^{\frac{1}{2}} \phi(1) = \|a\| \phi(1).$$

Segue que  $\|\phi\| \leq \phi(1)$ . É óbvio que  $\phi(1) \leq |\phi(1)| \leq \|\phi\|$ .

Agora suponha que  $\phi$  é limitada e  $\|\phi\| = \phi(1)$ . Substituindo  $\phi$  por  $\phi/\|\phi\|$ , podemos assumir que  $\phi(1) = 1$ . Primeiro mostremos que  $\phi$  toma valores reais em elementos autoadjuntos. Escolha  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a^* = a$ , e sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\phi(a) = \alpha + i\beta$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\|a + i\lambda 1\|^2 = \|(a - i\lambda 1)(a + i\lambda 1)\| = \|a^2 + \lambda^2 1\| \leq \|a\|^2 + \lambda^2$$

(a última igualdade é pelo corolário (1.56)) e por conseguinte

$$\begin{aligned} \beta^2 + 2\lambda\beta + \lambda^2 &\leq \alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 = |\alpha + i(\beta + \lambda)|^2 = |\alpha + i\beta + i\lambda|^2 \\ &= |\phi(a) + i\lambda\phi(1)|^2 \\ &= |\phi(a + i\lambda 1)|^2 \\ &\leq \|a\|^2 + \lambda^2, \end{aligned}$$

isto implica que  $\beta = 0$ .

Agora provemos que  $\phi$  toma valores positivos em elementos positivos. Escolha  $h \in \mathcal{A}$ ,  $0 \leq h \leq 1$ . Então

$$|1 - \phi(h)| = |\phi(1 - h)| \leq \|1 - h\| \leq 1$$

e pela proposição (1.71)(1)  $\phi(h) \in \mathcal{A}_+$ . Assim,  $\phi(h) \geq 0$ . □

**Definição 1.81** *Um **estado** numa álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  é uma forma linear em  $\mathcal{A}$  que é positiva e de norma 1.*

**Observação 1.82** *Pela proposição (1.80)(1) para todo estado  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade se cumpre que  $\phi(1) = 1$ .*

### Exemplo 1.83

- Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  de operadores num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  que contém  $id_{\mathcal{H}}$  e seja  $\xi \in \mathcal{H}(1)$  um vetor de norma 1. Então a forma linear

$$\omega_{\xi} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & \langle a\xi, \xi \rangle \end{array}$$

é positiva. Se além disso  $id_{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$  (ou mais geralmente se além disso  $\overline{\mathcal{A}\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ ) neste caso  $\omega_{\xi}$  é chamado um **vetor estado**. Observe que

$$\omega_{\xi} = \omega_{e^{it}}$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$ .

- Seja  $A$  a subálgebra involutiva densa de  $\mathcal{C}([0, 1])$  de funções polinomiais  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e seja  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  a forma linear definida por  $\phi(f) = f(2)$ . Então temos que

$$\phi(f^*f) \geq 0$$

para todo  $f \in A$  porém  $\phi$  não é contínua com respeito à norma  $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ .

Com efeito, se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $A$  definida por  $f_n(t) = t^n$ , então  $\|f_n\| = 1$  e  $\phi(f_n) = 2^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A definição de estado deixa ainda aberta a questão da existência de estados não nulos em álgebras- $C^*$  mas isso é garantido pela seguinte proposição.

**Proposição 1.84** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  e seja  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a \neq 0$ . Então existe um estado  $\phi$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $\phi(a^*a) > 0$ .*

**Demonstração.** Sabemos do teorema (1.72) que  $\mathcal{A}_+$  é um cone convexo fechado em  $\mathcal{A}_{sa}$ . Como  $-a^*a \notin \mathcal{A}_+$ , pelo teorema de Hahn-Banach existe uma forma linear  $\tilde{\phi} : \mathcal{A}_{sa} \rightarrow \mathbb{R}$  de norma 1 que é positiva em  $\mathcal{A}_+$  e estritamente negativa em  $-a^*a$ . A extensão  $\mathbb{C}$ -linear  $\phi$  de  $\tilde{\phi}$  a  $\mathcal{A}$  é um estado tal que  $\phi(-a^*a) < 0$ .  $\square$

## 1.4.2 Construção GNS

Vamos agora apresentar um dos resultados fundamentais da teoria de álgebras- $C^*$ , o qual fornece um método de construção de representações de uma álgebra- $C^*$  a partir de um estado na mesma álgebra, isto vai levar à conclusão de que qualquer álgebra- $C^*$  pode ser representada como uma álgebra- $C^*$  de operadores num espaço de Hilbert.

**Teorema 1.85 (construção GNS)** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade e seja  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  um estado. Então existem: um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\phi$ , uma representação  $\pi_\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H}_\phi)$  e um vetor  $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$  de norma 1 tal que*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a) (\xi_\phi), \xi_\phi \rangle,$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$  e tal que  $\xi_\phi$  é cíclico para  $\pi_\phi$ , isto é, tal que  $\overline{\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi} = \mathcal{H}_\phi$ .

**Demonstração.** Defina  $V_\phi = \{a \in \mathcal{A}; \phi(a^*a) = 0\}$ . Para  $a \in V_\phi$  e  $b \in \mathcal{A}$ , temos também  $\phi(b^*a) = 0$  pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (1.6). Então

$$V_\phi = \{a \in \mathcal{A}; \phi(b^*a) = 0 \text{ para todo } b \in \mathcal{A}\}$$

e  $V_\phi$  é um ideal esquerdo fechado em  $\mathcal{A}$ . A forma sesquilinear positiva  $(a, b) \mapsto \phi(b^*a)$  em  $\mathcal{A}$  define uma forma sesquilinear positiva no quociente  $\mathcal{A}/V_\phi$  dada por

$$\langle a + V_\phi, b + V_\phi \rangle = \phi(b^*a),$$

para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ . Isto faz de  $\mathcal{A}/V_\phi$  um espaço pre-Hilbert. Definamos  $\mathcal{H}_\phi$  como sendo seu completamento e  $\xi_\phi$  como sendo o vetor  $1 + V_\phi \in \mathcal{A} + V_\phi \subset \mathcal{H}_\phi$ .

Para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $L_a : \mathcal{A}/V_\phi \rightarrow \mathcal{A}/V_\phi$  denota a multiplicação esquerda  $b + V_\phi \mapsto ab + V_\phi$ . Para calcular  $\|L_a\|$ , considere a forma linear positiva definida em  $\mathcal{A}$  por  $a \mapsto \phi(b^*ab)$ , a qual é de norma  $\phi(b^*b)$  pela proposição (1.80)(1). Tem-se que

$$\langle L_a(b + V_\phi), L_a(b + V_\phi) \rangle = \phi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \phi(b^*b) = \|a\|^2 \langle b + V_\phi, b + V_\phi \rangle$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ , logo  $\|L_a\| \leq \|a\|$ . Então  $L_a$  estende a um operador limitado em  $\mathcal{H}_\phi$  que denotamos por  $\pi_\phi$ . A função  $\pi_\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H}_\phi)$  é uma representação tal que

$$\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle a1 + V_\phi, 1 + V_\phi \rangle = \phi(1^*a) = \phi(a)$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$  e tal que

$$\overline{\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi} = \overline{\mathcal{A}/V_\phi} = \mathcal{H}_\phi.$$

□

### Exemplo 1.86

Vamos rever a prova anterior no caso  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  e  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\phi(a) = \text{traço}(ap)$ , onde

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

é uma projeção de posto 1. Temos que

$$V_\phi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

Então, se  $e_1$  denota o primeiro vetor da base canônica de  $\mathbb{C}^n$ , a função  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^n$  definida por  $a \mapsto a(e_1)$  fatora através de um isomorfismo  $\mathcal{A}/V_\phi \rightarrow \mathbb{C}^n$ . O produto escalar definido via  $\phi$  neste espaço  $\mathcal{A}/V_\phi \approx \mathbb{C}^n$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \phi \left( \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & * \\ b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & * & \cdots & * \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ a_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & * & \cdots & * \end{pmatrix} \right) \\ &= \phi \left( \begin{pmatrix} \sum \bar{b}_j a_j & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \right) = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j a_j \end{aligned}$$

e é apenas o produto escalar usual em  $\mathbb{C}^n$ . A representação  $\pi_\phi$  é a representação tau-tológica de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  em  $B(\mathbb{C}^n)$ .

# Capítulo 2

## Curvas mínimas em espaços associados às álgebras $C^*$

### 2.1 Minimalidade das geodésicas na variedade de Grassmann

Nesta seção vamos abordar o artigo [17] onde se estuda a variedade de Grassmann clássica  $G_{q,n}$  de subespaços de dimensão  $q$  em espaços de dimensão  $n$  e pode ser alternativamente descrita pelo conjunto das simetrias (vistas como raízes quadradas da identidade), deixando um  $q$ -plano fixo. Assim, a geometria de  $G_{q,n}$  pode ser estudada por transferência de conceitos e resultados ao espaço das simetrias, que acaba sendo uma subvariedade analítica do espaço das matrizes  $n \times n$ .

Se, nesta interpretação, escolhermos a norma de operadores das matrizes,  $G_{q,n}$  não seria uma variedade de Riemann. No entanto, o último teorema deste capítulo implica que geodésicas curtas em  $G_{q,n}$  são curvas mínimas para o comprimento de arco derivado do operador norma.

**Definição 2.1** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade 1. A Grassmanniana  $\text{Gr}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  é o conjunto das simetrias de  $\mathcal{A}$ , isto é,*

$$\text{Gr}(\mathcal{A}) = \{s \in \mathcal{A}; s^* = s \text{ e } s^2 = 1\}.$$

*Equivalentemente,  $\text{Gr}(\mathcal{A})$  pode ser identificada com o conjunto de autoadjuntos idempotentes*

$$\{p \in \mathcal{A}; p^* = p \text{ e } p^2 = p\}$$

*se  $s = 2p - 1$ .*

Derivando as condições anteriores, o tangente à Grassmanniana pode ser descrito como

$$T_s \text{Gr}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A}, x^* = x \text{ e } xs + sx = 0\}$$

ou equivalentemente,

$$T_p \text{Gr}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A}, x^* = x \text{ e } xp + px = x\}.$$

Dada uma reflexão unitária  $s = 2p - 1$  denote por  $Proj_s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  a projeção linear-real e de norma limitada

$$Proj_s(z) = (1 - p)zp + pz^*(1 - p).$$

Sejam  $T_s$  e  $N_s$  a imagem e o núcleo de  $Proj_s$ , respectivamente, o seguinte resultado mostra que  $T_s Gr(\mathcal{A}) = T_s$ .

**Proposição 2.2**  $x \in T_s$  se e somente se  $x$  é autoadjunto e anti-comuta com  $s$ .

**Demonstração.** Suponha primeiro que  $x \in T_s$ , então existe  $z \in \mathcal{A}$  tal que  $Proj_s(z) = x$ , ou seja,  $(1 - p)zp + pz^*(1 - p) = x$ . Vejamos que  $x$  é autoadjunto

$$\begin{aligned} x^* &= [(1 - p)zp + pz^*(1 - p)]^* = p^*z^*(1 - p)^* + (1 - p)^*(z^*)^*p^* \\ &= pz^*(1 - p) + (1 - p)zp \\ &= x \end{aligned}$$

e agora mostremos que  $x$  anti-comuta com  $s$

$$\begin{aligned} sx &= s(1 - p)zp + spz^*(1 - p) = (2p - 1)(1 - p)zp + (2p - 1)pz^*(1 - p) \\ &= (2p - 2p^2 - 1 + p)zp + 2p^2z^*(1 - p) - pz^*(1 - p) \\ &= (2p - 2p - 1 + p)zp + 2pz^*(1 - p) - pz^*(1 - p) \\ &= (-1 + p)zp - pz^*(-1 + p) \\ &= (-1 + p)z(2p - p) - pz^*(2p - 1 - 2p + p) \\ &= (-1 + p)z(2p^2 - p) - pz^*(2p - 1 - 2p^2 + p) \\ &= (-1 + p)zp(2p - 1) - pz^*(1 - p)(2p - 1) \\ &= -[(1 - p)zp + pz^*(1 - p)](2p - 1) \\ &= -xs. \end{aligned}$$

Agora suponha que  $x$  é autoadjunto e anti-comuta com  $s$ , logo temos o seguinte

$$\begin{aligned} xs = -sx &\implies x(2p - 1) = -(2p - 1)x \\ &\implies 2xp - x = -2px + x \\ &\implies 2xp + 2px = 2x \\ &\implies xp + px = x \\ &\implies xp = x - px. \end{aligned}$$

Disto obtemos que

$$\begin{aligned} Proj_s(x) &= (1 - p)xp + px^*(1 - p) = (1 - p)xp + px(1 - p) \\ &= (1 - p)(x - px) + px - pxp \\ &= (1 - p)x - (1 - p)px + px - p(x - px) \\ &= (1 - p)x - (p - p^2)x + px - px + p^2x \\ &= x - px + px \\ &= x, \end{aligned}$$

isto é,  $x \in T_s$ . □

Definamos a função analítica  $E_s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  por

$$E_s(z) = e^{\frac{zs}{2}} se^{\frac{-zs}{2}}.$$



**Proposição 2.3** *Sejam  $s$  e  $r$  simetrias conjugadas, isto é,  $s = qrq^{-1}$  com  $q$  unitário e tais que  $\|s - r\| = d < 2$  e  $x = 2s \log(a|a|^{-1})$  onde  $a = (1 + sr)/2$ . Então  $x \in T_s$  e  $E_s(x) = r$ .*

**Demonstração.** Observe que  $\|s\|^2 = \|s^*s\| = \|s^2\| = \|1\| = 1$  e assim

$$\|1 - a\| = \left\| 1 - \frac{(1 + sr)}{2} \right\| = \left\| \frac{1 - sr}{2} \right\| = \left\| \frac{s^2 - sr}{2} \right\| = \left\| \frac{s(s - r)}{2} \right\| \leq \frac{d}{2} < 1.$$

Por outro lado, também temos que

$$\begin{aligned} aa^* &= \left( \frac{1 + sr}{2} \right) \left( \frac{1 + sr}{2} \right)^* = \frac{(1 + sr)(1 + r^*s^*)}{2^2} = \frac{(1 + sr)(1 + rs)}{2^2} \\ &= \frac{1 + rs + sr + srrs}{2^2} \\ &= \frac{1 + rs + sr + sr^2s}{2^2} \\ &= \frac{r^2 + sr + rs + s^2}{2^2} \\ &= \left[ \frac{(s + r)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

e análogamente provamos que  $a^*a = \left[ \frac{(s+r)}{2} \right]^2$ . Segue que  $a$  é um elemento normal invertível. Logo, pela observação (1.62) existe um único par de elementos  $|a|, u \in \mathcal{A}$  tais que  $a = |a|u = u|a|$  com  $|a| = \sqrt{a^*a}$  positivo e  $u$  unitário. Então  $u = a|a|^{-1} = |a|^{-1}a$  é unitário e como  $\|1 - a\| < \frac{d}{2}$ , pelo teorema espectral concluímos que  $\|1 - u\| \leq \frac{d}{2} < 1$ .

Assim, definimos  $w = \log u$  que está bem definida se usamos o ramo principal de  $\log$ , no conjunto onde a função é bijetiva teríamos que  $e^w = u$ . Note que

$$w = \log u = \log(1 + (u - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (u - 1)^{n+1}$$

converge pois  $\|1 - u\| < 1$  e

$$w^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} [(u - 1)^{n+1}]^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (u^* - 1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (u^{-1} - 1)^{n+1} = \log(u^{-1}).$$

Logo,  $e^w = u$  e  $e^{w^*} = u^{-1}$  e sabemos que  $e^{-w} = (e^w)^{-1} = u^{-1}$ . Portanto,  $e^{w^*} = e^{-w}$  e assim  $w^* = -w$ , ou seja,  $w$  é anti-simétrico.

Por outro lado, mostremos que  $sa = ar = \frac{s+r}{2}$  é autoadjunto e a partir disso provemos que  $s$  e  $r$  comutam com  $|a|$ . De fato,

$$\begin{aligned} sa &= s \frac{(1 + sr)}{2} = \frac{s + s^2r}{2} = \frac{s + r}{2} \\ ar &= \frac{(1 + sr)}{2} r = \frac{r + sr^2}{2} = \frac{r + s}{2} \\ (sa)^* &= \left( \frac{s + r}{2} \right)^* = \frac{s^* + r^*}{2} = \frac{s + r}{2} = sa \end{aligned}$$

$$(ar)^* = \left( \frac{s+r}{2} \right)^* = \frac{s+r}{2} = ar.$$

Portanto,  $a^*s = (sa)^* = sa$  e  $ra^* = (ar)^* = ar$ . Em resumo,  $sa = ar = a^*s = ra^*$  e provar que  $s$  e  $r$  comutam com  $|a|$  é equivalente a provar que comutam com  $|a|^2 = aa^* = a^*a$  pela decomposição polar de  $a$ . Assim,

$$\begin{aligned} s|a|^2 &= saa^* = ara^* = aar = aa^*s = |a|^2s, \\ r|a|^2 &= ra^*a = ara = a^*sa = a^*ar = |a|^2r \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Em consequência,

$$sus = sa|a|^{-1}s = a^*s|a|^{-1}s = a^*|a|^{-1}s^2 = a^*|a|^{-1} = u^* = u^{-1}.$$

Agora vejamos que  $sws = -w$  ou  $x = 2sw = -2ws$ , para isto vamos usar a série de log. Primeiro observe que  $sus - 1 = sus - ss = s(u - 1)s$  e por conseguinte

$$\begin{aligned} u^{-1} = sus &\implies \log(u^{-1}) = \log(sus) \implies w^* = \log(1 + (sus - 1)) \\ &\implies -w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (sus - 1)^{n+1} \\ &\implies -w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} [s(u - 1)s]^{n+1}. \end{aligned}$$

Provemos por indução que  $[s(u - 1)s]^n = s(u - 1)^n s$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $k = 2$

$$[s(u - 1)s]^2 = s(u - 1)ss(u - 1)s = s(u - 1)s^2(u - 1)s = s(u - 1)^2s.$$

Suponha que vale para  $k = n - 1$ , isto é,  $[s(u - 1)s]^{n-1} = s(u - 1)^{n-1}s$  e provemos para  $k = n$

$$[s(u - 1)s]^n = [s(u - 1)s]^{n-1}[s(u - 1)s] = s(u - 1)^{n-1}ss(u - 1)s = s(u - 1)^n s.$$

Logo,  $-w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} [s(u - 1)s]^{n+1} = s \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (u - 1)^{n+1} \right) s = s(\log u)s = sws$ . Portanto,  $sws = -w$ . Disso,

$$sws = -w \implies swss = -ws \implies sws^2 = -ws \implies sw = -ws.$$

Assim,  $x = 2s \log u = 2sw = -2ws$ .

Mostremos que  $x$  é autoadjunto e anti-comuta com  $s$ ,

$$x^* = (2sw)^* = 2w^*s^* = 2(-w)s = -2ws = x$$

e

$$sx = s(2sw) = 2s^2w = 2w = 2ws^2 = (2ws)s = -(-2ws)s = -xs.$$

Pela proposição (2.2)  $x \in T_s$ . Também temos que

$$\begin{aligned} E_s(x) &= e^{\frac{xs}{2}} s e^{\frac{-xs}{2}} = e^{-w} s e^w & (xs = 2sws = -2wss = -2w) \\ &= u^* s u \\ &= |a|^{-1} a^* s a |a|^{-1} \\ &= |a|^{-1} r a^* a |a|^{-1} & (a^*s = ra^*) \\ &= |a|^{-1} r |a|^2 |a|^{-1} & (a^*a = |a|^2) \\ &= |a|^{-1} r |a| |a| |a|^{-1} \\ &= |a|^{-1} |a| r |a| |a|^{-1} & r \text{ comuta com } |a| \\ &= r \end{aligned}$$

o qual completa a prova da proposição.  $\square$

Observemos que, dado  $s \in Gr(\mathcal{A})$ , a projeção  $Proj_s$  decompõe o espaço como a soma direta dos operadores que anti-comutam com  $s$ , que é o tangente em  $s$  à  $Gr(\mathcal{A})$  e os operadores que comutam com  $s$ , que complementa a  $T_s Gr(\mathcal{A})$ . Isto induz uma *conexão* no fibrado tangente à Grassmanniana de  $\mathcal{A}$ , via derivar campos tangentes considerados como campos vetoriais no espaço ambiente e projetar de volta a  $T_s Gr(\mathcal{A})$ .

As curvas de aceleração zero desta conexão canônica chamamos de *geodésicas dinâmicas*. A seguir caracterizamos as geodésicas dinâmicas saindo de  $s \in Gr(\mathcal{A})$ ; o principal resultado desta seção é que geodésicas dinâmicas *curtas* na Grassmanniana também são geodésicas geométricas, isto é, são curvas que minimizam o comprimento de curvas unindo os extremos.

**Proposição 2.4** *As geodésicas dinâmicas através de  $s \in Gr(\mathcal{A})$  têm a forma*

$$\gamma(t) = e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}}$$

*e em particular a exponencial da conexão canônica está dada pelas funções  $E_s$  anteriores.*

**Demonstração.** Note que é suficiente verificar que  $\frac{d\gamma(0)}{dt} = x$  e  $Proj_{\gamma(t)} \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} = 0$ . Calculemos  $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t)}{dt} &= e^{\frac{txs}{2}} \frac{xs}{2} s e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} s \left( \frac{-xs}{2} \right) e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} \frac{x}{2} s^2 e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} s s \frac{x}{2} e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} \frac{x}{2} e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} \frac{x}{2} e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} x e^{-\frac{txs}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{d\gamma(0)}{dt} = x$ . Como  $\gamma(t) = e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}} = e^{\frac{txs}{2}} \gamma(0) e^{-\frac{txs}{2}}$  e  $e^{\frac{txs}{2}}$  é unitário  $Ker Proj_{\gamma(t)} = e^{\frac{txs}{2}} Ker Proj_{\gamma(0)} e^{-\frac{txs}{2}}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} &Proj_{\gamma(t)}(z) \\ &= \left( 1 - \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) z \left( \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) + \left( \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) z^* \left( 1 - \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1-\gamma(t)}{2} \right) z \left( \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) + \left( \frac{\gamma(t)+1}{2} \right) z^* \left( \frac{1-\gamma(t)}{2} \right) \\ &= \left( \frac{e^{\frac{txs}{2}} e^{-\frac{txs}{2}} - e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}}}{2} \right) z \left( \frac{e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} e^{-\frac{txs}{2}}}{2} \right) + \left( \frac{e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} e^{-\frac{txs}{2}}}{2} \right) z^* \left( \frac{e^{\frac{txs}{2}} e^{-\frac{txs}{2}} - e^{\frac{txs}{2}} s e^{-\frac{txs}{2}}}{2} \right) \\ &= e^{\frac{txs}{2}} \frac{(1-s)}{2} e^{-\frac{txs}{2}} z e^{\frac{txs}{2}} \frac{(s+1)}{2} e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} \frac{(s+1)}{2} e^{-\frac{txs}{2}} z^* e^{\frac{txs}{2}} \frac{(1-s)}{2} e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} (1-p) z p e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} p z^* (1-p) e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} [(1-p) z p + p z^* (1-p)] e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} Proj_s(z) e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} Proj_{\gamma(0)}(z) e^{-\frac{txs}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,  $Ker Proj_{\gamma(t)} = e^{\frac{txs}{2}} Ker Proj_{\gamma(0)} e^{-\frac{txs}{2}}$ . Calculemos  $\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} &= e^{\frac{txs}{2}} \frac{xs}{2} x e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} x \left( \frac{-xs}{2} \right) e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} \left( \frac{-x^2 s}{2} \right) e^{-\frac{txs}{2}} + e^{\frac{txs}{2}} \left( \frac{-x^2 s}{2} \right) e^{-\frac{txs}{2}} \\ &= e^{\frac{txs}{2}} (-x^2 s) e^{-\frac{txs}{2}}. \end{aligned}$$

Disto obtemos que  $\frac{d^2\gamma(0)}{dt^2} = -x^2s$ . Agora vejamos que  $\frac{d^2\gamma(0)}{dt^2} \in \text{Ker} \text{Proj}_{\gamma(0)}$

$$\begin{aligned}
\text{Proj}_{\gamma(0)} \left( \frac{d^2\gamma(0)}{dt^2} \right) &= \text{Proj}_s \left( \frac{d^2\gamma(0)}{dt^2} \right) \\
&= (1-p)(-x^2s)p + p(-x^2s)^*(1-p) \\
&= \left(1 - \frac{s-1}{2}\right)(-x^2s) \left(\frac{s+1}{2}\right) + \left(\frac{s+1}{2}\right)(-x^2s)^* \left(1 - \frac{s-1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1-s}{2}\right)(-x^2s) \left(\frac{s+1}{2}\right) + \left(\frac{s+1}{2}\right)(-x^2s) \left(\frac{1-s}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-x^2s + sx^2s}{2}\right) \left(\frac{s+1}{2}\right) + \left(\frac{s+1}{2}\right) \left(\frac{-x^2s + x^2ss}{2}\right) \\
&= \frac{-x^2s^2 - x^2s + sx^2s^2 + sx^2s - sx^2s + sx^2s^2 - x^2s + x^2s^2}{4} \\
&= \frac{-x^2 - x^2s + sx^2 + sx^2 - x^2s + x^2}{4} \\
&= \frac{-2x^2s + 2sx^2}{4} \\
&= \frac{-2sx^2 + 2sx^2}{4} = 0
\end{aligned}$$

portanto concluímos que  $\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \in \text{Ker} \text{Proj}_{\gamma(t)}$ , ou seja,  $\text{Proj}_{\gamma(t)} \left( \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \right) = 0$ .

Outra forma de provar que  $\text{Proj}_{\gamma(t)} \left( \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \right) = 0$  é observar que  $\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} = -x^2\gamma(t) = -\gamma(t)x^2$  e a partir disso obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Proj}_{\gamma(t)} \left( \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} \right) &= (1-p)(-x^2\gamma(t))p + p(-x^2\gamma(t))^*(1-p) \\
&= \left(1 - \frac{\gamma(t)+1}{2}\right)(-x^2\gamma(t)) \left(\frac{\gamma(t)+1}{2}\right) + \left(\frac{\gamma(t)+1}{2}\right)(-x^2\gamma(t))^* \left(1 - \frac{\gamma(t)+1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right)(-x^2) \left(\frac{\gamma(t)^2 + \gamma(t)}{2}\right) + \left(\frac{\gamma(t)^2 + \gamma(t)}{2}\right)(-x^2) \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right)(-x^2) \left(\frac{1+\gamma(t)}{2}\right) + \left(\frac{1+\gamma(t)}{2}\right)(-x^2) \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right) \left(\frac{-x^2 - x^2\gamma(t)}{2}\right) + \left(\frac{1+\gamma(t)}{2}\right) \left(\frac{-x^2 + x^2\gamma(t)}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right) \left(\frac{1+\gamma(t)}{2}\right)(-x^2) + \left(\frac{1+\gamma(t)}{2}\right) \left(\frac{1-\gamma(t)}{2}\right)(-x^2) \\
&= \left(\frac{1-\gamma(t)^2}{4}\right)(-x^2) + \left(\frac{1-\gamma(t)^2}{4}\right)(-x^2) \\
&= \left(\frac{1-1}{4}\right)(-x^2) + \left(\frac{1-1}{4}\right)(-x^2) = 0.
\end{aligned}$$

□

**Observação 2.5** De  $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -x^2\gamma$  obtemos que

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \|x\|^2 \gamma = \gamma(\|x\|^2 - x^2).$$

**Teorema 2.6** *Geodésicas dinâmicas curtas na variedade de Grassmann de uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  têm comprimento mínimo. Mais precisamente, uma geodésica dinâmica de comprimento inferior a  $\pi$  é menor do que qualquer outra curva unindo seus extremos.*

**Demonstração.** Sabemos da proposição (2.4) que  $\gamma(t) = e^{\frac{txs}{2}} se^{-\frac{txs}{2}}$  é uma geodésica dinâmica em  $Gr(\mathcal{A})$ . Como  $x^* = x$  e  $x \neq 0$ , pela proposição (1.84) existe um estado  $f$  em  $\mathcal{A}$  tal que  $f(x^2) = \|x\|^2$  e pelo teorema (1.85) existem: um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , uma representação  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  e um vetor  $\xi \in \mathcal{H}$  de norma 1 tal que

$$f(a) = \langle \rho(a)\xi, \xi \rangle$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ . Nesta situação  $\xi$  é um autovetor de  $\rho(x^2)$  com autovalor  $\|x\|^2$ . De fato, veja que

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\|x\|^2 1 - \rho(x^2))\eta, \eta \rangle}{\|\eta\|^2} &= \frac{\langle \|x\|^2 \eta, \eta \rangle - \langle \rho(x^2)\eta, \eta \rangle}{\|\eta\|^2} = \frac{\|x\|^2 \langle \eta, \eta \rangle - \langle \rho(x)\eta, \rho(x)\eta \rangle}{\|\eta\|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2 \langle \eta, \eta \rangle - \|\rho(x)\eta\|^2}{\|\eta\|^2} \\ &\geq \|x\|^2 - \|\rho(x)\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

para todo  $\eta \in \mathcal{H}$ , ou seja,  $\|x\|^2 1 - \rho(x^2)$  é um operador positivo, então pela proposição (1.74) existe um operador autoadjunto  $H \in B(\mathcal{H})$  de modo que  $\|x\|^2 1 - \rho(x^2) = H^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|H\xi\|^2 &= \langle H\xi, H\xi \rangle = \langle H^2\xi, \xi \rangle = \langle (\|x\|^2 1 - \rho(x^2))\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \|x\|^2 \xi, \xi \rangle - \langle \rho(x^2)\xi, \xi \rangle \\ &= \|x\|^2 - f(x^2) = 0 \end{aligned}$$

ou seja  $H\xi = 0$ , consequentemente  $\rho(x^2)\xi = \|x\|^2 \xi$ .

A continuação a ideia da demonstração é um caso particular do que faremos na próxima seção. Queremos mostrar que a função  $\rho$  reduz comprimento e que para as curvas  $\gamma(t)$  a imagem sob  $\rho$  são grandes círculos na esfera unitária de  $\mathcal{H}$  e o comprimento é preservado como se mostra na figura (2.1).

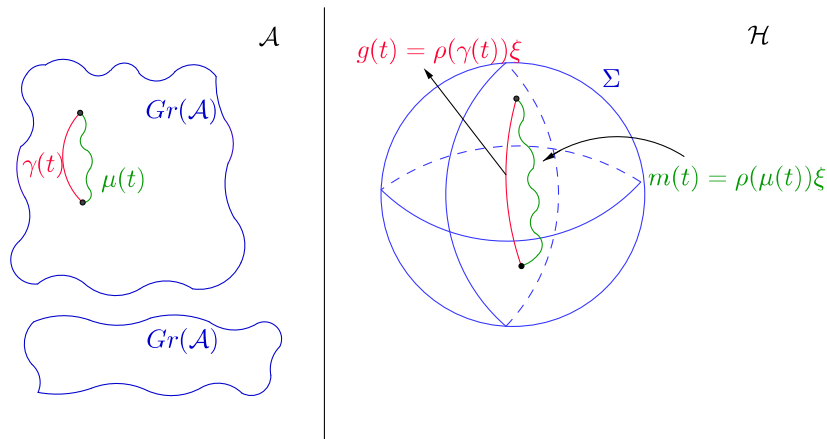


Figura 2.1: o desenho do lado esquerdo representa a Grassmanniana da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  e o do lado direito a esfera unitária do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Agora considere a curva  $g(t)$  na esfera unitária  $\Sigma$  de  $\mathcal{H}$  definida por  $g(t) = \rho(\gamma(t))\xi$ . Note que  $g(t)$  está bem definida pois  $\|g(t)\| = \|\rho(\gamma(t))\xi\| = \|\xi\| = 1$ . Da

observação (2.5) segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 g}{dt^2} + \|x\|^2 g &= \rho \left( \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \|x\|^2 \gamma \right) \xi &= \rho (-\gamma x^2 + \|x\|^2 \gamma) \xi \\
 &= \rho ((\|x\|^2 1 - x^2) \gamma) \xi \\
 &= \rho(\gamma) \rho(\|x\|^2 1 - x^2) \xi \\
 &= \rho(\gamma) [\|x\|^2 \xi - \rho(x^2) \xi] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De forma que  $g$  é uma geodésica em  $\Sigma$  para a estrutura Riemanniana induzida por  $\mathcal{H}$ . Suponha que  $\mu(t)$  é outra curva em  $Gr(\mathcal{A})$  unindo  $\mu(0) = \gamma(0)$  e  $\mu(\tau) = \gamma(\tau)$  e seja  $m(t) = \rho(\mu(t))\xi$ . A curva  $m$  em  $\Sigma$  une  $g(0)$  a  $g(\tau)$  e

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{dm(t)}{dt} \right\| &= \left\| \rho \left( \frac{d\mu(t)}{dt} \right) \xi \right\| \leq \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{H} \\ \|\eta\|=1}} \left\| \rho \left( \frac{d\mu(t)}{dt} \right) \eta \right\| \\
 &= \left\| \rho \left( \frac{d\mu(t)}{dt} \right) \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{d\mu(t)}{dt} \right\|.
 \end{aligned}$$

Assim,  $\ell(m) = \int_0^\tau \left\| \frac{dm(t)}{dt} \right\| dt \leq \int_0^\tau \left\| \frac{d\mu(t)}{dt} \right\| dt = \ell(\mu)$ .

Lembre que  $\frac{d\gamma(t)}{dt} = e^{\frac{txs}{2}} x e^{-\frac{txs}{2}}$  e  $\frac{d\gamma(0)}{dt} = x$ , então  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \|x\|$ . Logo, como  $\frac{dg(t)}{dt} = \rho \left( \frac{d\gamma(t)}{dt} \right) \xi$  temos que  $\frac{dg(0)}{dt} = \rho \left( \frac{d\gamma(0)}{dt} \right) \xi = \rho(x)\xi$ . Portanto,

$$\left\| \frac{dg(0)}{dt} \right\|^2 = \langle \rho(x)\xi, \rho(x)\xi \rangle = \langle \rho(x^2)\xi, \xi \rangle = f(x^2) = \|x\|^2$$

segue que  $\left\| \frac{dg(0)}{dt} \right\| = \|x\|$ . Assim,  $\left\| \frac{dg(t)}{dt} \right\| = \|x\|$ . Em consequência,  $\left\| \frac{dg(t)}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\|$  e portanto  $\ell(g) = \ell(\gamma)$ . Agora se  $\ell(\gamma) < \pi$  então  $g$  é uma geodésica curta em  $\Sigma$ , consequentemente mínima, logo

$$\ell(\gamma) = \ell(g) \leq \ell(m) \leq \ell(\mu).$$

□

## 2.2 Geometria métrica em espaços homogêneos do grupo unitário de uma álgebra- $C^*$ : curvas mínimas

Nesta seção vamos estudar o artigo [10] referente à geometria métrica de espaços homogêneos  $\mathcal{P}$  do grupo unitário de uma álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  módulo o grupo unitário de uma subálgebra- $C^*$   $\mathcal{B}$ , onde a métrica invariante é induzida pela norma quociente de  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ .

Os espaços homogêneos em questão são variedades de Banach  $\mathcal{P}$  nas quais o grupo unitário  $\mathcal{U}$  da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  age transitivamente, digamos pela esquerda; denotemos a ação de  $g \in \mathcal{U}$  em  $\rho \in \mathcal{P}$  por  $L_g$ . O estabilizador  $E_\rho = \{g \in \mathcal{U}; L_g \rho = \rho\}$  será o grupo unitário da subálgebra- $C^*$   $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ .

A forma usual de dotar um espaço de uma métrica é considerar uma métrica bi-invariante no grupo e então subduzi-la para o quociente  $\mathcal{P}$ . Mas álgebras- $C^*$  vêm dotadas com uma norma essencialmente única, ou seja, a norma de operadores em alguma representação de  $\mathcal{A}$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  a qual é bi-invariante embora certamente não Riemanniana devido a que não provém de um produto interno. Esta norma é completamente não regular, em dois sentidos: primeiro, não é diferenciável mas apenas contínua. Segundo, não é estritamente convexa; existem muitos conjuntos abertos de subespaços afins contidos na esfera unitária, o qual dificulta muitas construções do cálculo das variações.

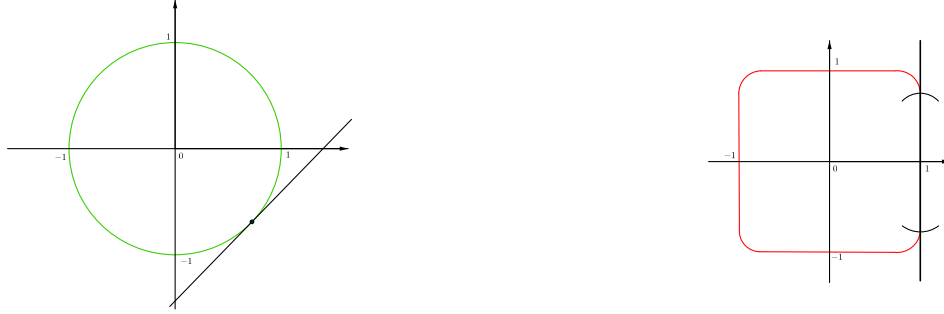


Figura 2.2: o desenho do lado esquerdo mostra a esfera unitária que provém da norma euclidiana e o do lado direito a esfera unitária que provém da norma do máximo suavizada.

Como a norma euclidiana é convexa, a esfera unitária do lado esquerdo da figura (2.2) não contém conjuntos abertos de qualquer subespaço afim enquanto a esfera unitária do lado direito da figura (2.2) contém conjuntos abertos de alguns subespaços afins pois a norma do máximo suavizada não é estritamente convexa e com a norma de operadores acontece o mesmo.

Resta a questão de como fazer descer a métrica em  $\mathcal{U}$  para o quociente  $\mathcal{P}$ . A forma natural de fazê-lo é considerar cada espaço tangente  $T_\rho \mathcal{P}$  *metricamente* como o quociente de Banach

$$T_\rho \mathcal{P} = (T_1 \mathcal{U}) / (T_1 E_\rho) = \mathcal{A}^{ant} / \mathcal{B}^{ant},$$

onde  $\mathcal{A}^{ant}$  e  $\mathcal{B}^{ant}$  denotam as partes anti-simétricas das álgebras  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Assim, definimos a norma de Finsler em  $\mathcal{P}$  por  $\|X\| = \inf_{b \in \mathcal{B}^{ant}} \|Z + b\|$  onde  $Z$  projeta a  $X$  no quociente. Denotamos por  $|\cdot|$  a norma na álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$ .

O teorema principal desta seção se refere a curvas mínimas em  $\mathcal{P}$ , ou seja, curvas de comprimento mínimo unindo extremos fixos. Chamaremos essas curvas de **geodésicas**. O comprimento de uma curva  $\rho(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , está dado por  $\ell(\rho) = \int_0^1 \|\dot{\rho}(t)\|_{\rho(t)} dt$ , onde  $\|X\|_{\rho(t)}$  denota a norma de Finsler do vetor tangente  $X$  no ponto  $\rho(t) \in \mathcal{P}$ . Neste texto se estuda o problema: dado um vetor inicial  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ , encontrar geodésicas  $\gamma$  satisfazendo  $\dot{\gamma}(0) = X$ .

### 2.2.1 Bandeiras generalizadas

**Definição 2.7**  $\mathcal{P}$  é uma **bandeira generalizada** se satisfaz as seguintes condições:

1.  $\mathcal{P}$  é uma variedade de Banach  $C^\infty$ .
2. Uma álgebra- $C^*$  com unidade  $\mathcal{A}$  cujo grupo unitário  $\mathcal{U}$  age transitivamente e suavemente em  $\mathcal{P}$  pela esquerda.
3. O grupo estabilizador  $E_\rho$  em  $\rho \in \mathcal{P}$  dado por  $E_\rho = \{g \in \mathcal{U}; L_g \rho = \rho\}$ , é o grupo unitário  $\mathcal{U}_\rho$  da subálgebra- $C^*$   $\mathcal{B}_\rho$  de  $\mathcal{A}$ .
4. A derivada  $T_1 \pi_\rho : T_1 \mathcal{U} = \mathcal{A}^{\text{ant}} \rightarrow T_\rho \mathcal{P}$  da função natural  $\pi_\rho : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$  dada por  $\pi_\rho(g) = L_g(\rho)$  é sobrejetiva.
5. A estrutura de Finsler em  $\mathcal{P}$  é dada por  $\|X\|_\rho = \inf_{b \in \mathcal{B}_\rho^{\text{ant}}} |Z + b|$ , onde  $T_1 \pi_\rho(Z) = X$ , ou seja, para  $\rho \in \mathcal{P}$ , a norma  $\|X\|_\rho$  é a norma quociente de Banach de  $X$  em  $T_1 \mathcal{U} / T_1 E_\rho = \mathcal{A}^{\text{ant}} / \mathcal{B}_\rho^{\text{ant}}$ . Observe que esta estrutura de Finsler é invariante sob a ação de  $\mathcal{U}$ .

Em dimensão finita, caso multiplicidade livre, supondo que  $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , a inclusão do grupo unitário da subálgebra- $C^*$   $\mathcal{B}$  pode ser apresentada como uma inclusão diagonal em  $U(n)$  da forma

$$\begin{pmatrix} U(k_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U(k_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U(k_m) \end{pmatrix}$$

como é bem conhecido. Portanto, o espaço homogêneo é uma variedade bandeira.

Por esta razão, o espaço homogêneo deste trabalho será chamado **bandeira generalizada**. Para o resto desta seção devemos supor automaticamente que a bandeira generalizada em questão está dotada de uma métrica quociente em cada espaço tangente.

Alguns exemplos no caso de dimensão infinita são:

- A Grassmanniana de uma álgebra- $C^*$  geral [5, 7].
- Bandeiras finitas de uma álgebra- $C^*$  geral [6].
- Espaços de medidas espectrais [3].

**Definição 2.8** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{P}$  da forma  $\gamma(t) = L_{e^{tz}} \rho$  para  $Z \in \mathcal{A}^{\text{ant}}$  e  $t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  é chamada **curva do grupo uni-paramétrico**.

**Definição 2.9** Dizemos que  $Z \in \mathcal{A}^{\text{ant}}$  é um **levantamento** de  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ , se  $T_1 \pi_\rho(Z) = X$ . Note que a curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$  dada por  $\alpha(t) = e^{tZ}$  satisfaz  $\alpha(0) = 1$  e  $\frac{d}{dt}|_{t=0} (\alpha(t)) = Z$  então

$$X = (T_1 \pi_\rho)(Z) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\pi_\rho \circ \alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\pi_\rho(\alpha(t))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{\alpha(t)} \rho = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{e^{tZ}} \rho.$$

Em consequência, outra forma de definir um levantamento é a seguinte.

**Definição 2.10** Seja  $X \in T_\rho \mathcal{P}$  um vetor tangente a uma bandeira generalizada. Dizemos que um vetor  $Z \in T_1 \mathcal{U} = \mathcal{A}^{\text{ant}}$  é um **levantamento** de  $X$  se  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L_{e^{tZ}} \rho = X$ , isto é,  $Z$  projeta  $X$  no quociente.



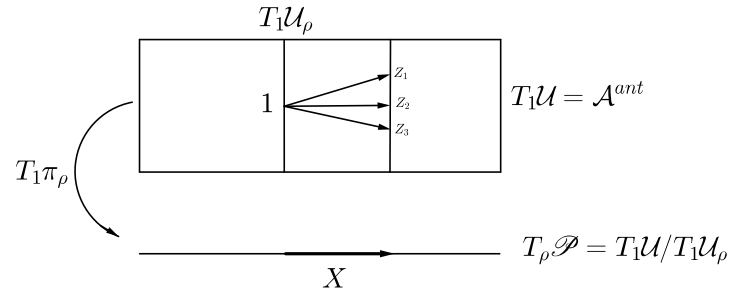


Figura 2.3:  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  são levantamentos de  $X$ .

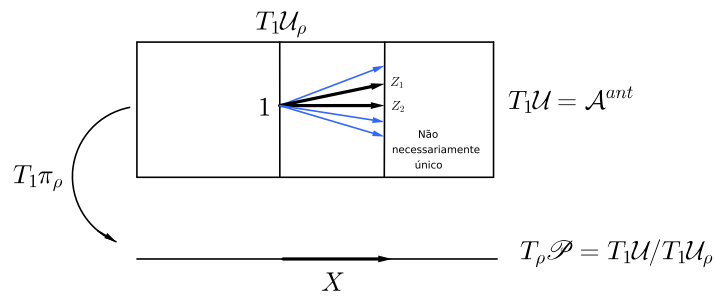


Figura 2.4:  $Z_1$  e  $Z_2$  são levantamentos mínimos de  $X$

**Definição 2.11** Dizemos que  $Z \in \mathcal{A}^{\text{ant}}$  é um **levantamento mínimo** de  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ , se  $T_1 \pi_\rho(Z) = X$  e  $|Z| = \|X\| = \inf \{|Z|, Z \text{ é um levantamento de } X\} = \inf_{b \in \mathcal{B}^{\text{ant}}} |Z + b|$ .

Observe que se  $V$  e  $W$  são espaços euclidianos (o que nunca será o nosso caso!) e  $F : V \rightarrow W$  linear e sobrejetora então  $F|_{\text{Ker}(F^\perp)}$  é um isomorfismo e portanto a levantada mínima existe e é única. No caso geral temos um problema de existência e unicidade pois levantamento mínimo nem sempre existe e se existe não necessariamente é único como se ilustra na figura (2.4).

## Estruturas métricas em bandeiras generalizadas

Seja  $M$  uma variedade de Banach. Uma **estrutura de Finsler** em  $M$  é uma seleção contínua de normas  $\|\cdot\|_m$  em cada espaço tangente  $T_m M$ .

**Observação 2.12** A definição usual de uma estrutura de Finsler inclui diferenciabilidade e convexidade estrita da norma, esta definição também restritiva nos casos que estamos relacionando. Chamaremos **estrutura de Finsler regular** aquelas que são diferenciáveis e estritamente convexas.

**Definição 2.13** Para qualquer estrutura de Finsler, o comprimento da curva  $w(t)$  definida para  $a \leq t \leq b$  está dado por,

$$\ell(w) = \int_a^b \|\dot{w}(t)\|_{w(t)} dt.$$

A distância  $d$  em  $M$  é dada como segue: seja  $R_{\rho_0, \rho_1}$  o conjunto de caminhos suaves por partes  $w$  ( $w : [0, 1] \rightarrow M$ ) que unem  $w(0) = \rho_0$  com  $w(1) = \rho_1$ . Definimos,

$$d(\rho_0, \rho_1) = \inf_{w \in R_{\rho_0, \rho_1}} \ell(w).$$

**Definição 2.14** Dizemos que uma curva  $w$  é **mínima** em  $M$  se seu comprimento é a distância entre seus extremos.

## Representações de Grassmann e reflexões isotrópicas

Estamos interessados em funções equivariantes de  $\mathcal{P}$  na variedade de Grassmann. Isto será realizado com o uso de representações adaptadas, similar em espírito às “representações classe  $C^1$ ” [14], a qual dá imersões equivariantes de espaços homogêneos na esfera.

**Definição 2.15** Seja  $\rho_0 \in \mathcal{P}$  fixo e seja  $r_0$  uma reflexão unitária de um espaço de Hilbert, isto é,  $r_0^* = r_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  e  $r_0^2 = 1$ . Dizemos que uma representação  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  é uma **representação de Grassmann** em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , se para cada elemento  $g \in \mathcal{U}_{\rho_0}$  sua imagem  $\phi(g) \in B(\mathcal{H})$  está no comutante de  $r_0$  em  $B(\mathcal{H})$ , ou seja,  $\phi(g)r_0 = r_0\phi(g)$ .

Denote por  $Gr(\mathcal{H})$  a variedade de Grassmann de  $\mathcal{H}$  a qual é justamente o conjunto de reflexões unitárias de  $\mathcal{H}$  como na seção anterior. A Grassmanniana  $Gr(\mathcal{H})$  é um espaço homogêneo sob o grupo unitário da álgebra- $C^*$   $B(\mathcal{H})$ . Por meio da representação assumida acima, podemos considerar  $Gr(\mathcal{H})$  como um espaço homogêneo sob o grupo unitário  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{A}$ . Para qualquer representação de Grassmann em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , consideremos a função  $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$ , dada como segue: tome qualquer  $g \in \mathcal{U}$  que satisfaz  $\rho = L_g \rho_0$ , então

$$F(\rho) = \phi(g)r_0\phi(g)^{-1}.$$

$F$  está bem definida pela hipótese do comutante de  $r_0$ . De fato, suponha que  $g_i \in \mathcal{U}_{\rho_0}$  para  $i = 1, 2$  satisfaz  $\rho = L_{g_i}\rho_0$ . Deveríamos verificar que

$$\phi(g_1)r_0\phi(g_1)^{-1} = \phi(g_2)r_0\phi(g_2)^{-1}$$

e isto equivale à identidade

$$\phi(g_2)^{-1}\phi(g_1)r_0 = r_0\phi(g_2)^{-1}\phi(g_1).$$

Mas isto é imediato a partir da hipótese sobre o comutante de  $r_0$ , para  $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{U}_{\rho_0}$ , e  $\phi(g_2)^{-1}\phi(g_1) = \phi(g_2^{-1}g_1)$ .

**Lema 2.16** *Cada função  $F$  é compatível com a ação de  $\mathcal{U}$  no espaço homogêneo correspondente, ou seja, para todo  $g \in \mathcal{U}$  e  $\rho \in \mathcal{P}$ ,  $F(L_g\rho) = \phi(g)F(\rho)\phi(g)^{-1}$ .*

**Demonstração.** Se  $F(L_g\rho) = \phi(g_1)r_0\phi(g_1)^{-1}$ , onde  $g_1 \in \mathcal{U}$  satisfaz  $L_g\rho = L_{g_1}\rho_0$ , então  $\rho = L_{g^{-1}g_1}\rho_0$  e  $F(\rho) = \phi(g^{-1})\phi(g_1)r_0(\phi(g^{-1})\phi(g_1))^{-1}$ . Logo,

$$\phi(g)F(\rho)\phi(g)^{-1} = \phi(g_1)r_0\phi(g_1)^{-1} = F(L_g\rho).$$

□

Damos um exemplo que ilustra o espírito da construção.

### Exemplo 2.17 (Bandeiras inteiras)

Seja  $\mathcal{F}$  o espaço homogêneo de bandeiras inteiras em  $\mathbb{C}^n$ , isto é, o conjunto de todo  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  onde os  $p_i \in B(\mathbb{C}^n)$  são mutuamente ortogonais, projeções de posto 1 (de modo que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ). O grupo unitário  $U(n) \subset B(\mathbb{C}^n)$  age naturalmente e transitivamente em  $\mathcal{F}$ .

Funções equivariantes  $\sigma$  de  $\mathcal{F}$  na variedade de Grassmann podem ser obtidas como segue: dado um subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\{1, \dots, n\}$ , definamos a função  $\sigma_{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{F}$  na variedade de Grassmann por

$$\sigma_{\mathcal{S}}(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} p_j \right).$$

Neste exemplo a representação de  $B(\mathbb{C}^n)$  é a identidade. Dado  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{F}$  sua imagem  $\rho_0 = \sigma_{\mathcal{S}}(\mathbf{p}_0)$  é uma reflexão isotrópica adaptada a  $\mathbf{p}_0$ .

### 2.2.2 Funções que reduzem comprimento

A ideia principal na prova do teorema principal desta seção é a seguinte. Primeiro, dado um vetor tangente  $X \in T_{\rho}\mathcal{P}$ , encontrar funções  $F_X : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  que reduzem comprimento, onde  $\mathcal{S}$  é a esfera de raio  $1/2$  de um certo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  no qual  $\mathcal{A}$  está representado. As geodésicas de  $\mathcal{S}$  são as usuais bem conhecidas grandes círculos parametrizados por comprimento de arco, e para levantamentos mínimos  $Z$  de  $X$ , a imagem de  $\gamma(t) = L_{e^{tZ}}\rho$  sob  $F_X$  é um grande círculo na esfera. Como as funções são redutoras de comprimento, segue que  $\gamma$  minimiza comprimento entre seus extremos para comprimentos até  $\pi/2$ .

As funções que reduzem comprimento devem usar fatoração através da Grassmanniana  $Gr(\mathcal{H})$ , da álgebra- $C^*$   $B(\mathcal{H})$  no qual a álgebra- $C^*$  dada  $\mathcal{A}$  está representada:  $\mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$ . Cada uma destas funções reduzirá o comprimento das curvas, e as curvas cujo comprimento é preservado são curvas mínimas.

Note que essas construções são extrínsecas, em principio dependem de uma representação de  $\mathcal{A}$  na álgebra dos operadores limitados de um espaço de Hilbert, e também dependem da função  $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$ , a qual está definida em termos da representação. Nas subseções 4 e 5 usamos a teoria GNS de representações de álgebras- $C^*$  para construir representações baseadas em dados intrínsecos. Um caso particular simples desta ideia foi usado na seção anterior.

Apresentamos condições suficientes para construir funções que reduzem comprimento da bandeira generalizada à variedade de Grassmann da forma  $Gr(\mathcal{H}) = Gr(B(\mathcal{H}))$  onde  $\mathcal{H}$  é algum espaço de Hilbert.

Lembre que a estrutura de Finsler do espaço homogêneo  $Gr(\mathcal{H})$  é obtida como segue. Para  $X \in T_r Gr(\mathcal{H})$  temos,

$$\|X\|_r = \frac{1}{2} |X|,$$

onde  $X$  é identificado com um elemento de  $B(\mathcal{H})$  (ver [7]).

**Lema 2.18** *Seja  $\mathcal{H} = S_0 + S_1$  uma decomposição ortogonal de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Considere operadores limitados  $X$  e  $Y$  em  $\mathcal{H}$ , com respeito a esta decomposição, são representados por matrizes de operadores como*

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & c \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Então  $\|X\| \geq \|b\| = \|Y\|$ , onde  $\|\cdot\|$  indica a norma usual para operadores.

**Demonstração.** Lembremos que  $\|Y\|^2 = \|YY^*\|$  e observe que

$$\|YY^*\| = \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\|.$$

Vamos provar primeiro que  $\|bb^*\| = \|b\|^2 = \|b^*b\|$ . Como  $b^*b$  e  $bb^*$  são operadores autoadjuntos, da proposição (1.21) obtemos que

$$\|b\|^2 = \sup_{\substack{x \in S_0 \\ \|x\|=1}} \|bx\|^2 = \sup_{\substack{x \in S_0 \\ \|x\|=1}} \langle bx, bx \rangle = \sup_{\substack{x \in S_0 \\ \|x\|=1}} \langle b^*bx, x \rangle = \|b^*b\|$$

e

$$\|bb^*\| = \sup_{\substack{y \in S_1 \\ \|y\|=1}} \langle bb^*y, y \rangle = \sup_{\substack{y \in S_1 \\ \|y\|=1}} \langle b^*y, b^*y \rangle = \sup_{\substack{y \in S_1 \\ \|y\|=1}} \|b^*y\|^2 = \|b^*\|^2 = \|b\|^2.$$

Agora vamos mostrar que  $\|YY^*\| = \|b\|^2$ . Note que pela decomposição de  $\mathcal{H}$

qualquer elemento  $v \in \mathcal{H}$  pode ser escrito como  $v = x + y$  com  $x \in S_0$  e  $y \in S_1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|YY^*v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} bb^*x \\ b^*by \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \|bb^*x\|^2 + \|b^*by\|^2 \\ &\leq \|bb^*\|^2 \|x\|^2 + \|b^*b\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|b\|^4 (\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &= \|b\|^4 \end{aligned}$$

para todo  $v \in \mathcal{H}$  tal que  $\|v\| = 1$ , ou seja, para todo  $x \in S_0$  e  $y \in S_1$  tais que  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ . Logo,

$$\|YY^*\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \|b\|^4$$

e portanto  $\|YY^*\| \leq \|b\|^2$ .

Agora consideremos uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $S_0$  com  $\|x_n\| = 1$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|bb^*x_n\| = \|bb^*\|$ . Por conseguinte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} bb^*x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|bb^*x_n\|^2 = \|bb^*\|^2 = \|b\|^4$$

e assim

$$\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\|^2 \geq \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\|^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|b\|^4.$$

Em consequência,  $\|YY^*\| \geq \|b\|^2$  então  $\|Y\| = \|b\|$ . A seguir mostremos que  $\|X\| \geq \|b\|$ . Para qualquer  $\xi \in S_0$  com  $\|\xi\| = 1$ ,

$$\|b^*\xi\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a\xi \\ -b^*\xi \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \|X\|.$$

De onde obtemos que  $\|b\| = \|b^*\| \leq \|X\|$ . □

**Proposição 2.19** *Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada. Para qualquer representação de Grassmann  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{A}$  em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , a função correspondente  $F$  reduz comprimento, isto é,  $\|T_\rho F(X)\|_{F(\rho)} \leq \|X\|_\rho$ , para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ ,  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ .*

**Demonstração.** Pela equivariância de  $F$  com respeito às ações isométricas do grupo unitário o qual foi provado no lema (2.16) e a invariância da estrutura de Finsler, é suficiente verificar o resultado em  $\rho = \rho_0$ . Seja  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ , considere qualquer curva  $\gamma(t)$  por  $\rho_0$  que verifique  $\dot{\gamma}(0) = X$ ; por exemplo consideremos  $\gamma(t) = L_{e^{tZ}} \rho_0$ , onde  $Z$  é algum levantamento de  $X$ . Esta curva  $\gamma(t)$  é transformada em

$$F(\gamma(t)) = \phi(e^{tZ}) F(\rho_0) \phi(e^{-tZ}) = e^{t\phi(Z)} r_0 e^{-t\phi(Z)},$$

como  $\frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(e^{t\phi(Z)})r_0e^{-t\phi(Z)} + e^{t\phi(Z)}r_0[-e^{-t\phi(Z)}\frac{d}{dt}(e^{t\phi(Z)})e^{-t\phi(Z)}]$  temos que

$$T_{\rho_0}F(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \phi(Z)r_0 - r_0\phi(Z) = [\phi(Z), r_0].$$

Considere a decomposição ortogonal induzida por  $r_0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ , com  $\mathcal{H}_+ = \{x; r_0(x) = x\}$  e  $\mathcal{H}_- = \{x; r_0(x) = -x\}$ . Com respeito a esta decomposição escrevemos

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi(Z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix},$$

onde  $a_{11}$  e  $a_{22}$  são funções anti-simétricas  $a_{11} : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$  e  $a_{22} : \mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_-$ , respectivamente. Então temos

$$T_{\rho_0}F(X) = [\phi(Z), r_0] = -2 \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12}^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $\|X\|_{\rho_0} = \inf \{|Z|; Z \text{ é um levantamento de } X\}$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$  podemos escolher  $Z$  de modo que  $|Z| < \|X\|_{\rho_0} + \varepsilon$ . Agora temos,  $\|X\|_{\rho_0} + \varepsilon > |Z| \geq \|\phi(Z)\|$  como consequência do corolário (1.59) e do lema anterior obtemos

$$\begin{aligned} \|T_{\rho_0}F(X)\|_{F(\rho_0)} &= \|T_{\rho_0}F(X)\|_{r_0} = \frac{1}{2} \|[\phi(Z), r_0]\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12}^* & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|\phi(Z)\| \end{aligned}$$

de onde obtemos  $\|T_{\rho_0}F(X)\|_{F(\rho_0)} < \|X\|_{\rho_0} + \varepsilon$  que implica  $\|T_{\rho_0}F(X)\|_{F(\rho_0)} \leq \|X\|_{\rho_0}$  pois  $\varepsilon > 0$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno.  $\square$

A seguir, apresentamos funções que reduzem comprimento  $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$  de  $Gr(\mathcal{H})$  na esfera unitária  $\mathcal{S} = \{\eta \in \mathcal{H}; \|\eta\| = 1\}$ . Consideremos  $\mathcal{S}$  como uma variedade Riemanniana com a métrica dada por  $\|W\|_\eta = \frac{1}{2} \|W\|$ , para cada  $\eta \in \mathcal{S}$  e  $W \in T_\eta \mathcal{S}$ .

Para cada  $\xi \in \mathcal{S}$ , considere a função  $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$  dada por:

$$m_\xi(r) = r(\xi).$$

**Proposição 2.20** *A função  $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$  reduz comprimento.*

**Demonstração.** Considere uma curva  $r(t)$  em  $Gr(\mathcal{H})$  com  $\dot{r}(0) = Y \in T_{r(0)}Gr(\mathcal{H})$ . A curva imagem é  $m_\xi(r(t)) = r(t)\xi$ , então

$$T_{r(0)}m_\xi(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (m_\xi \circ r)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} m_\xi(r(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r(t)\xi = \dot{r}(0)\xi = Y\xi.$$

Logo,

$$\|T_{r(0)}m_\xi(Y)\|_{r(0)\xi} = \|Y\xi\|_{r(0)\xi} = \frac{1}{2} \|Y\xi\| \leq \frac{1}{2} \|Y\| = \|Y\|_{r(0)}.$$

Para  $\xi \in \mathcal{S}$ , definimos a função  $F_\xi; F_\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  por

$$F_\xi(\rho) = F(\rho)\xi.$$

$\square$

**Corolário 2.21** *Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada. Para qualquer representação de Grassmann de  $\mathcal{A}$  em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , e qualquer  $\xi \in \mathcal{S}$ , a função  $F_\xi$  reduz comprimento.*

**Demonstração.** Observando que  $F_\xi = m_\xi \circ F$  e como cada uma dessas funções reduz comprimento temos

$$\|T_\rho F_\xi(X)\|_{F_\xi(\rho)} = \|T_\rho(m_\xi \circ F)(X)\|_{m_\xi(F(\rho))} = \|T_{F(\rho)} Gr(T_\rho F(X))\|_{m_\xi(F(\rho))} \leq \|T_\rho F(X)\|_{F(\rho)} \leq \|X\| \rho$$

para todo  $\rho \in \mathcal{P}$ ,  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ .  $\square$

### 2.2.3 Condições geométricas para minimalidade

Aqui damos condições “extrínsecas” que garantem que um arco suficientemente curto de uma curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{tz}} \rho_0$  minimiza comprimento entre todas as curvas com os mesmos extremos. A palavra “extrínseca” aqui significa que essas condições se referem a representações de Grassmann.

Essas condições são apresentadas em duas formas nos teoremas (2.24) e (2.26).

#### Condições de minimalidade para uma representação de Grassmann dada

Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada junto com uma representação de Grassmann em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , digamos  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ . Seja  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$  e um levantamento  $Z$  de  $X$  dado.

**Definição 2.22** *O par  $(X, Z)$  está em **boa posição** para a representação de Grassmann dada, se existe um vetor unitário  $\xi \in \mathcal{H}$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$ .
2.  $\xi$  realiza a norma de  $Z^2$ , ou seja,  $\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi$ ,  $\lambda = |Z|$ .
3.  $r_0(\xi) = \xi$ ,  $r_0(\phi(Z)\xi) = -\phi(Z)\xi$ .

Note que, por causa da condição (2) acima temos  $\lambda = |Z| = \|\phi(Z)\|$ .

**Lema 2.23** *Dada uma representação de Grassmann  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{P}$  em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , e um par  $(X, Z)$  ( $X \neq 0$ ) que está em boa posição para esta representação, então  $F_\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  leva a curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{tz}} \rho_0$  na geodésica  $w(t) = F_\xi(\gamma(t))$  na esfera  $\mathcal{S}$ . Mais ainda, o comprimento de  $w(t)$  desde 0 até  $0 < t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$  coincide com o comprimento de  $\gamma(t)$ , ou seja,  $\ell_0^t w = t|Z|$ .*

**Demonstração.** Considere  $\mu > 0$  e  $\eta \in \mathcal{H}$  com  $\|\eta\| = 1$  tal que  $\phi(Z)\xi = \mu\eta$ . Temos,

$$\begin{aligned} -\lambda^2 &= -\lambda^2 \langle \xi, \xi \rangle = \langle -\lambda^2 \xi, \xi \rangle = \langle \phi(Z^2)\xi, \xi \rangle = \langle \phi(ZZ)\xi, \xi \rangle &= \langle \phi(Z)\phi(Z)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \phi(Z)\xi, \phi(Z)^*\xi \rangle \\ &= \langle \phi(Z)\xi, \phi(Z^*)\xi \rangle \\ &= -\langle \phi(Z)\xi, \phi(Z)\xi \rangle \\ &= -\langle \mu\eta, \mu\eta \rangle \\ &= -\mu^2 \langle \eta, \eta \rangle \\ &= -\mu^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\lambda = \mu$ . Vejamos que  $\phi(Z)$  deixa invariante o subespaço bi-dimensional  $\Delta$  gerado por  $\xi$  e  $\eta$ , assim como seu complemento ortogonal  $\Delta^\perp$  já que  $\phi(Z)\xi = \mu\eta = \lambda\eta$  e

$$\phi(Z)\eta = \phi(Z)\left(\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda}\right) = \frac{\phi(Z)^2\xi}{\lambda} = \frac{\phi(Z^2)\xi}{\lambda} = -\frac{\lambda^2\xi}{\lambda} = -\lambda\xi.$$

Assim,

$$\phi(Z)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta) = \alpha_1\phi(Z)\xi + \alpha_2\phi(Z)\eta = \alpha_1\lambda\eta - \alpha_2\lambda\xi \in \Delta$$

para todo  $\alpha_1\xi + \alpha_2\eta \in \Delta$  e com isso para todo  $y \in \Delta^\perp$  obtemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \phi(Z)y \rangle &= \langle \phi(Z)^*(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle = \langle \phi(Z^*)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle \\ &= -\langle \phi(Z)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle \\ &= -\langle \alpha_1\lambda\eta - \alpha_2\lambda\xi, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

para todo  $\alpha_1\xi + \alpha_2\eta \in \Delta$ , ou seja,  $\phi(Z)y \in \Delta^\perp$ .

O conjunto  $B = \{\xi, \eta\}$  forma uma base ortonormal para  $\Delta$  e como  $\phi(Z)\xi = \lambda\eta$  e  $\phi(Z)\eta = -\lambda\xi$  a matriz  $M$  de  $\phi(Z)$  com respeito à base  $B$  é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Devido a que  $(X, Z)$  está em boa posição para a representação de Grassmann tem-se que  $r_0(\xi) = \xi$  e  $r_0(\eta) = r_0\left(\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda}\right) = -\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda} = -\eta$ . A reflexão  $r_0$  deixa estável  $\Delta$  e  $\Delta^\perp$ , e sua restrição a  $\Delta$  tem matriz  $R_0$  com respeito à base  $B$ :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que  $w(t) = F_\xi(\gamma(t)) = F(\gamma(t))\xi = \phi(e^{tZ})r_0\phi(e^{-tZ})\xi = e^{t\phi(Z)}r_0e^{-t\phi(Z)}\xi$  e para facilitar as contas vamos usar a representação matricial com respeito à base  $B$ . Calculemos primeiro  $e^{tM}$

$$\begin{aligned} e^{tM} &= 1 + t \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots \\ &= I_0 + (\lambda t)J_0 - \frac{(\lambda t)^2}{2}I_0 - \frac{(\lambda t)^3}{3!}J_0 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\lambda t)^{2n} I_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\lambda t)^{2n+1} J_0 \\ &= \cos(\lambda t)I_0 + \sin(\lambda t)J_0 \end{aligned}$$

onde

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

disto podemos concluir que

$$e^{-tM} = \cos(\lambda t)I_0 - \sin(\lambda t)J_0.$$



Logo,

$$\begin{aligned}
& e^{tM} R_0 e^{-tM} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[ \cos(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\lambda t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[ \cos(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin(\lambda t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \sin(\lambda t) \\ -\sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ -\sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\lambda t) - \sin^2(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) + \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) \\ \sin(2\lambda t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e portanto  $w(t) = \cos(2\lambda t)\xi + \sin(2\lambda t)\eta$ . Assim,  $w(t)$  é uma geodésica na esfera  $\mathcal{S}$ .

Finalmente calculemos o comprimento de  $w(s)$  desde  $s = 0$  até  $s = t$ ,

$$\begin{aligned}
\ell_0^t w &= \int_0^t \|w'(s)\|_{w(s)} ds = \int_0^t \frac{1}{2} \|w'(s)\| ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} \|-2\lambda \sin(2\lambda s)\xi + 2\lambda \cos(2\lambda s)\eta\| ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} (2\lambda) ds \\
&= t\lambda \\
&= t|Z|.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.24** Dada uma representação de Grassmann  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{A}$  em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ , e um par  $(X, Z)$  ( $X \neq 0$ ) que está em boa posição para esta representação, defina  $\gamma(t) = L_{e^{tZ}} \rho_0$ . Então  $\gamma(t)$  minimiza comprimento entre os pontos  $\rho_0 = \gamma(0)$  e  $\gamma(t)$  se

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}.$$

Neste caso,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = \ell_0^t \gamma = t|Z|.$$

**Demonstração.** Considere a curva  $\delta(s)$  em  $\mathcal{P}$  com  $0 \leq s \leq t$  que liga  $\rho_0 = \gamma(0)$  e  $\gamma(t)$ , para  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$ . Considere  $v(s) = F_\xi(\delta(s))$  e  $w(s) = F_\xi(\gamma(s))$ . Estas curvas unem  $\xi = w(0)$  a  $w(t)$ . Temos as seguintes desigualdades:

1.  $\ell_0^t w \leq \ell_0^t v$  se  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$ , pois  $w$  é uma geodésica na variedade de Riemann  $\mathcal{S}$ .
2.  $\ell_0^t \delta \geq \ell_0^t v$ , pois  $F_\xi$  reduz comprimento de acordo ao corolário (2.21).

Agora observe que  $\ell_0^t \gamma = \ell_0^t w$  pelo lema (2.23). Então combinando essas observações obtemos

$$\ell_0^t \gamma = \ell_0^t w \leq \ell_0^t v \leq \ell_0^t \delta.$$

□

### Uma condição geométrica alternativa suficiente para minimalidade

Aqui apresentamos um teorema similar ao teorema (2.24), acerca de curvas do grupo uni-paramétrico que são mínimas.

**Definição 2.25** *Seja  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ . Dizemos que uma representação  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$  é **adaptada** a  $X$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Existe um levantamento mínimo  $Z$  de  $X$ .*
2. *Existe um vetor unitário  $\xi \in \mathcal{H}$  o qual é um autovetor que realiza a norma de  $\phi(Z^2)$ , isto é,*

$$\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi \quad \text{com} \quad \lambda = |Z|.$$

3. *Para cada  $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$  o vetor  $\phi(b)\xi \in \mathcal{H}$  é ortogonal a  $\phi(Z)\xi$ .*

Diremos que um tal  $Z$  é **adaptado** a  $X$ .

Note que na definição anterior a representação pode não ser injetiva.

**Teorema 2.26** *Dada  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  uma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada a  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ , a curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{iz}\rho_0}$  minimiza comprimento até  $t = \frac{\pi}{2\|X\|_{\rho_0}}$  para qualquer  $Z$  adaptado a  $X$ .*

**Demonstração.** Defina a reflexão  $r_0$  em  $\mathcal{H}$  como segue,

$$r_0(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{se } \zeta \in S_{\rho_0}, \\ -\zeta & \text{se } \zeta \in S_{\rho_0}^\perp, \end{cases}$$

onde  $S_{\rho_0}$  é o fecho do espaço vetorial gerado por  $\Omega = \{\zeta \in \mathcal{H}; \zeta = \phi(b)\xi, \phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})\}$ . Observe que o comutante de  $r_0$  contém  $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ . De fato, provemos que o conjunto  $\Omega$  é invariante sob  $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ . Sejam  $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$  e  $\zeta \in \Omega$ , então  $\zeta = \phi(c)\xi$  com  $\phi(c) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ . Logo,

$$\phi(b)\zeta = \phi(b)\phi(c)\xi = \phi(bc)\xi \in \Omega$$

e portanto  $S_{\rho_0}$  e  $S_{\rho_0}^\perp$  também são invariantes sob  $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ . Em consequência,  $\phi$  é uma representação de Grassmann em  $\rho_0$  com respeito a  $r_0$ .

A seguir observemos que o par  $(X, Z)$  está em boa posição com respeito a  $r_0$  na representação  $\phi$ . Com efeito, é suficiente ver que  $\phi(Z)\xi \in S_{\rho_0}^\perp$ . Mas para cada  $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$  temos  $\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle = 0$ , o qual mostra que  $\phi(Z)\xi$  é ortogonal a  $\Omega$  e portanto a  $S_{\rho_0}$ . Agora a prova segue do teorema (2.24).  $\square$

### 2.2.4 O teorema de minimalidade

Na subseção anterior, assumimos que uma representação de Grassmann de  $\mathcal{A}$ , e os teoremas de minimalidade nela dependem da função equivariante  $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$  dada pela representação. Agora chegamos a um dos principais teoremas neste trabalho, o qual dá uma condição intrínseca para minimalidade. A prova, contudo, baseia-se na construção de uma representação e uma reflexão isotrópica a fim de aplicar os teoremas da subseção anterior.

Para encontrar uma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada ao vetor tangente  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ , precisamos estados da álgebra  $\mathcal{A}$  “adaptados” a  $X$ .

Considere o estado  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  da álgebra  $\mathcal{A}$  dada pelo vetor  $\xi$  na definição (2.25),

$$\varphi(a) = \langle \phi(a)\xi, \xi \rangle$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ . Com este estado  $\varphi$ , definimos o produto interno em  $\mathcal{A}$ ,

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \varphi(a_2^* a_1) = \langle \phi(a_1)\xi, \phi(a_2)\xi \rangle.$$

**Observação 2.27** A segunda condição da definição (2.25), isto é, existe um vetor unitário  $\xi \in \mathcal{H}$  que é um autovetor que realiza a norma de  $\phi(Z^2)$ , ou seja,

$$\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi \quad \text{com} \quad \lambda = |Z|$$

é equivalente à condição

$$Z^2 + \lambda^2 1 \in \text{Ker}\varphi, \quad \lambda = |Z|.$$

Com efeito, o elemento simétrico  $Z^2 + \lambda^2 1$  é positivo porque  $|Z|^2 = \lambda^2$ . Então  $(\phi(Z^2) + \lambda^2 1)\xi = 0$  é equivalente a

$$\langle (\phi(Z^2) + \lambda^2 1)\xi, \xi \rangle = 0$$

**Observação 2.28** A terceira condição na definição (2.25), a saber, para cada  $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$  o vetor  $\phi(b)\xi \in \mathcal{H}$  é ortogonal a  $\phi(Z)\xi$ , isto é,

$$\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle = 0$$

para todo  $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$  é equivalente à condição: para cada  $b \in \mathcal{U}_{\rho_0}$ ,  $Zb \in \text{Ker}\varphi$ .

De fato, observe que

$$\varphi(Zb) = \langle \phi(Zb)\xi, \xi \rangle = -\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle.$$

As observações (2.27) e (2.28) nos conduzem ao seguinte.

**Definição 2.29** Seja  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ . Dizemos que um estado  $\varphi$  é **adaptado** ao vetor tangente  $X$  se ele admite um levantamento  $Z$  tal que

1.  $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$ .
2.  $Z^2 + \lambda^2 1 \in \text{Ker}\varphi$ ,  $\lambda = |Z|$ .
3. Para cada  $b \in \mathcal{U}_{\rho_0}$ ,  $Zb \in \text{Ker}\varphi$ .

Claramente ter uma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada ao vetor  $X$  é equivalente à existência de um estado  $\varphi$  adaptado ao vetor  $X$ .

A seguir provaremos um lema útil para o qual necessitamos alguma notação. Fixemos  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ , definamos  $M = \{b_1 Z + Z b_2 \in \mathcal{A}; b_1, b_2 \in \mathcal{B}_{\rho_0}\}$ . Note que a parte simétrica de  $M$  é

$$M^{sim} = \{bZ - Zb^*; b \in \mathcal{B}_{\rho_0}\} = \{bZ + Zb; b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}\}.$$

Observe que a condição 2 na definição anterior é equivalente a exigir que  $M^{sim} \subset \text{Ker}\varphi$ , pois  $\mathcal{U}_{\rho_0}$  gera linearmente  $\mathcal{B}_{\rho_0}$  e  $\text{Ker}\varphi$  é fechado-\*

Denotemos por  $S$  o subespaço real de  $\mathcal{A}^{sim}$  gerado pelo subconjunto  $M^{sim}$  e o elemento  $Z^2 + \lambda^2 1$  em  $\mathcal{A}$  onde  $\lambda = |Z|$ .

**Lema 2.30** *As seguintes são equivalentes:*

1. *Existe uma forma linear real em  $\mathcal{A}^{sim}$  que é um estado.*
2.  *$S \cap C = \emptyset$ , onde  $C$  é o cone aberto de elementos invertíveis positivos de  $\mathcal{A}$ .*

**Demonstração.** (2)  $\Rightarrow$  (1) Pelo teorema de Hahn-Banach, se o espaço vetorial real  $S$  não intercepta  $C$ , existe um funcional linear que é positivo em  $C$ , e se anula em  $S$ . Este funcional linear quando é normalizado (se for necessário) é o estado desejado.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Por outro lado, qualquer estado é estritamente positivo nos elementos invertíveis positivos de  $\mathcal{A}^{sim}$ , assim o cone  $C$  não intercepta  $S$ .  $\square$

**Proposição 2.31** *Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada sobre o grupo unitário da álgebra  $C^*$   $\mathcal{A}$ . Seja  $X$  um vetor tangente de  $\mathcal{P}$  e seja  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  um levantamento de  $X$ . Então com a notação anterior, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Existe uma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada a  $X$ .*
2. *Existe um estado  $\varphi$  adaptado ao vetor  $X$ .*
3.  *$S$  não contém elementos invertíveis positivos de  $\mathcal{A}$ .*
4.  *$|Z^2| \leq |Z^2 + m|$ , para todo  $m \in M^{sim}$ .*

**Demonstração.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) Segue das observções (2.27) e (2.28).  
(2)  $\Leftrightarrow$  (3) Segue do lema (2.30).

(3)  $\Rightarrow$  (4) Suponha que a condição 3 é satisfeita e que  $|Z^2| > |Z^2 + m_0| = |-Z^2 - m_0|$  para algum  $m_0 \in M^{sim}$ . Então olhando os elementos de  $\mathcal{A}$  como operadores, o operador  $\lambda^2 1$  é mais grande que  $-Z^2 - m_0$ , ou seja,  $\lambda^2 1 + Z^2 + m_0 > 0$  que é um elemento invertível positivo em  $S$  e isto contradiz a hipótese.

(4)  $\Rightarrow$  (3) Suponha que existe um elemento invertível positivo da forma  $s(\lambda^2 1 + Z^2) + m$  com  $s \in \mathbb{R}$  e  $m \in M^{sim}$ , então teríamos

$$s(\lambda^2 1 + Z^2) + m \geq \sigma > 0 \quad \text{para algum } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Claramente podemos considerar  $s > 0$ , e assim

$$\lambda^2 1 + Z^2 + m \geq \tau > 0 \quad \text{para algum } \tau \in \mathbb{R},$$

logo  $\lambda^2 1 > -Z^2 - m$  como operadores e por conseguinte  $|Z^2| > |Z^2 + m|$ , o qual contradiz a condição 4.  $\square$

A última ferramenta da qual precisamos para provar nosso principal teorema é o seguinte resultado de convexidade.

**Lema 2.32** *No contexto anterior suponha que  $|(Z + b)^2| \geq |Z^2|$  para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}$ . Então  $|Z^2| \leq |Z^2 + bZ + Zb|$ , para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}$ .*

Este lema tem uma interpretação geométrica simples que é ilustrada na Figura 2.5 baseada no fato de que a expressão  $bZ + Zb$  é a derivada em  $t = 0$  da expressão  $(Z + tb)^2$ .

**Demonstração.** Considere para  $t > 0$  a função a valores de  $\mathcal{A}$   $h(t) = Z^2 + \frac{(Z+tb)^2 - Z^2}{t}$ . Primeiro mostremos que  $|h(t)| \geq |Z^2|$ . Supondo o contrário, que  $|h(t)| \leq |Z^2|$ , então a combinação convexa  $th(t) + (1-t)Z^2$  tem norma  $|th(t) + (1-t)Z^2| \leq |Z^2|$  para todo  $0 < t < 1$ . Note que

$$th(t) + (1-t)Z^2 = tZ^2 + (Z + tb)^2 - Z^2 + (1-t)Z^2 = (Z + tb)^2.$$

Então obtemos  $|(Z + b)^2| \leq |Z^2|$  que contradiz a hipótese. Observe que  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = Z^2 + bZ + Zb$ . Considere a desigualdade  $|h(t)| \geq |Z^2|$  e tomando o limite quando  $t \rightarrow 0$  obtemos  $|Z^2 + bZ + Zb| \geq |Z^2|$  como desejávamos.  $\square$

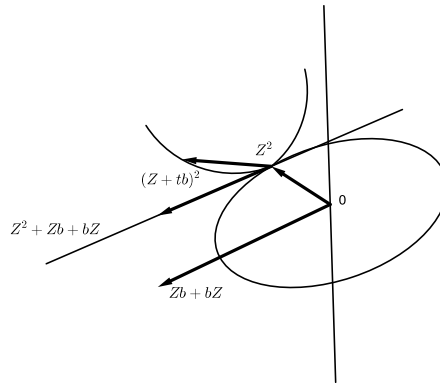


Figura 2.5: O ponto  $Z^2 + bZ + Zb$  se encontra fora da esfera de raio  $|Z^2|$ .

**Teorema 2.33** *Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada. Considere  $\rho \in \mathcal{P}$  e  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ . Suponha que existe  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  o qual é um levantamento mínimo de  $X$ . Então a curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{tz}} \rho_0$  tem comprimento mínimo na classe de todas as curvas em  $\mathcal{P}$  unindo  $\gamma(0)$  a  $\gamma(t)$  para cada  $t$  com  $|t| \leq \frac{\pi}{2|Z|}$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema (2.26) é suficiente mostrar que existe alguma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada a  $X$ . Pela hipótese temos que  $|Z + b| \geq |Z|$ , para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ . Tanto  $Z$  como  $b$  são anti-simétricos em  $\mathcal{A}$  então a condição  $|Z + b| \geq |Z|$  para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$  é equivalente a  $|(Z + b)^2| \geq |Z^2|$  para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ . Do lema (2.32) obtemos  $|Z^2| \leq |Z^2 + bZ + Zb|$  para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ . Portanto da proposição (2.31) temos que existe alguma representação de  $\mathcal{A}$  adaptada a  $X$ .  $\square$

**Observação 2.34** *No teorema (2.33), a hipótese analítica  $|Z + b| \geq |Z|$ , para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ , implica a condição geométrica que o par  $(X, Z)$  está em boa posição em alguma representação da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A}$ .*

## 2.2.5 Existência de curvas mínimas com velocidade inicial dada

Agora consideramos a questão da existência de curvas com um vetor velocidade inicial  $X$  dado. Do teorema (2.33), precisamos saber que existe um levantamento  $Z$  que

é mínimo, ou seja,  $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$  ou equivalentemente  $|Z + b| \geq |Z|$  para todo  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ . No caso em que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra de Von Neumann (álgebra- $W^*$ ), a existência de tal levantamento mínimo está garantida e isto será demonstrado no teorema (2.37).

Precisaremos um teorema sobre a minimalidade da norma. Suponha que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra- $W^*$  fracamente fechada. Observe que as partes simétrica e anti-simétrica de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  também são fracamente fechadas (ver [18] p.14).

**Teorema 2.35** *Suponha que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra- $W^*$  e que  $\mathcal{B}$  é uma subálgebra- $W^*$  de  $\mathcal{A}$  fracamente fechada. No espaço quociente  $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$ , a norma (quociente) de cada classe é realizada por algum elemento nesta classe.*

**Demonstração.** Seja  $Z \in \mathcal{A}^{sim}$  e para todo número natural  $n$  seja  $b_n \in \mathcal{B}^{sim}$  tal que

1.  $|Z + b_n|$  é uma sequência decrescente de números.
2. Se  $z = \inf_{b \in \mathcal{B}^{sim}} |Z + b|$  é a norma da classe de  $Z$  no quociente  $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$ , então

$$z \leq |Z + b_n| \leq z + \frac{1}{n}. \quad (2.1)$$

O conjunto dos  $b_n$  é limitado por

$$|b_n| \leq |Z + b_n| + |Z| \leq z + 1 + |Z|,$$

assim este conjunto é fracamente compacto. Então existe  $b \in \mathcal{B}^{sim}$  que está no fecho fraco de qualquer cauda  $\{b_k; k \geq n\}$ . A partir disto é claro que  $Z + b \in \mathcal{B}^{sim}$  está no fecho fraco de qualquer cauda  $D_n = \{Z + b_k; k \geq n\}$ . O teorema será provado uma vez mostrado que  $|Z + b| = z$ . Suponha que  $|Z + b| > z$ , de modo que existe um número natural  $n_0$  tal que  $|Z + b| > z + \frac{1}{n_0}$ . Denote por  $\mathcal{A}_*$  um pre-dual da álgebra- $W^*$   $\mathcal{A}$ . Então,

$$|Z + b| = \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{A}_* \\ |\eta|=1}} |\langle \eta, Z + b \rangle|,$$

onde  $\langle \eta, Z + b \rangle$  indica o valor de  $Z + b$  em  $\eta$ . Podemos escolher  $\xi \in \mathcal{A}_*$  de norma um, tal que

$$|Z + b| \geq |\langle \xi, Z + b \rangle| > z + \frac{1}{n_0}.$$

Agora como  $Z + b$  está no fecho fraco das caudas  $D_n$  para qualquer número natural  $n$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existem números  $n$  arbitrariamente grandes tais que

$$||\langle \xi, Z + b \rangle| - |\langle \xi, Z + b_n \rangle|| < \varepsilon.$$

Tomando  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, podemos encontrar algum  $n > n_0$  tal que  $|\langle \xi, Z + b_n \rangle|$  seja mais grande que  $z + \frac{1}{n_0}$ . Mas  $|Z + b_n| \geq |\langle \xi, Z + b_n \rangle|$  e obtemos que  $|Z + b_n| > z + \frac{1}{n_0} > z + \frac{1}{n}$  que contradiz a desigualdade (2.1) acima.  $\square$

Portanto, o seguinte corolário é imediato

**Corolário 2.36** *Suponha que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra- $W^*$  e que  $\mathcal{B}$  é uma subálgebra- $W^*$  de  $\mathcal{A}$  fracamente fechada. No espaço quociente  $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$ , a norma (quociente) de cada classe é atingida por algum elemento nesta classe.*

**Teorema 2.37** *Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $W^*$ , e seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada do grupo unitário de  $\mathcal{A}$ . Seja  $X \in T_\rho \mathcal{P}$ . Então existe um levantamento mínimo  $Z$  de  $X$ , e portanto a curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$  tem comprimento mínimo em  $\mathcal{P}$  entre todas as curvas unindo  $\gamma(0)$  e  $\gamma(t)$ , para cada  $t$  com  $|t| \leq \frac{\pi}{2|Z|}$ .*

**Demonstração.** Do corolário (2.36) obtemos que existe um levantamento  $Z$  de  $X$  que satisfaz  $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$ . A minimalidade da curva do grupo uni-paramétrico segue do teorema (2.33).  $\square$

Deste modo, para álgebras de Von Neumann, para cada “direção”  $X \in T_\rho \mathcal{P}$  ( $\|x\|_\rho = 1$ ) existe uma curva do grupo uni-paramétrico  $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$ ,  $\dot{\gamma}(0) = X$ , a qual é uma curva mínima para comprimento até  $\pi/2$ . Note que devido à falta de convexidade estrita da norma pode haver outras geodésicas com os mesmos vetores velocidade inicial.

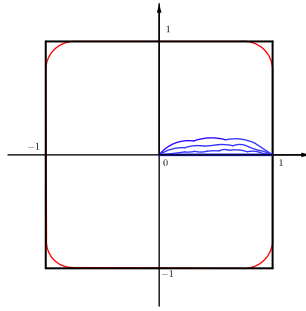


Figura 2.6: o quadrado representa a esfera unitária que provém da norma do máximo e o desenho vermelho a esfera unitária que provém da norma do máximo suavizada. As curvas azuis são geodésicas unindo os pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ .

O fenômeno descrito acima se ilustra na figura (2.2.5) onde as curvas azuis são da forma  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  com  $x'(t) > 0$  e  $|y'(t)| < |x'(t)|$ . Logo,  $\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 x'(t) dt = x(1) - x(0) = 1$  e este é o mesmo comprimento do segmento de reta horizontal que une  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Observe que o comprimento das curvas  $\gamma$  pode ser calculado para a norma do máximo e a norma do máximo suavizada, isto é, o fenômeno de várias geodésicas com os mesmos vetores velocidade inicial é devido à falta de convexidade estrita e não à falta de diferenciabilidade.

Concluimos esta seção com a seguinte observação acerca do diâmetro de qualquer bandeira generalizada sobre uma álgebra de Von Neumann como uma consequência dos teoremas (2.33) e (2.37).

**Proposição 2.38** *Seja  $\mathcal{P}$  uma bandeira generalizada sobre uma álgebra de Von Neumann  $\mathcal{A}$ . Então o diâmetro  $d(\mathcal{P})$  de  $\mathcal{P}$  satisfaz  $\frac{\pi}{2} \leq d(\mathcal{P}) \leq \pi$ .*

**Demonstração.** Seja  $X$  um vetor tangente a  $\mathcal{P}$  não nulo e qualquer ponto  $\rho$ . Seja  $Z$  um levantamento mínimo de  $X$ . Então a distância entre os pontos  $\rho$  e  $\gamma\left(\frac{\pi}{2|Z|}\right)$  é  $\frac{\pi}{2}$ , onde  $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$  (por teorema (2.33)). Portanto  $d(\mathcal{P}) \geq \frac{\pi}{2}$ . Por outro lado, para  $\rho, \sigma \in \mathcal{P}$  seja  $g \in \mathcal{U}$  tal que  $L_g\rho = \sigma$ . Como estamos supondo que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra de Von Neumann existe um elemento simétrico  $s \in \mathcal{A}$  tal que  $e^{is} = g$  e  $|s| \leq \pi$  (ver [15]). Então a curva  $L_{e^{itz}}\rho$  tem comprimento menor ou igual a  $\pi$  e une  $\rho$  a  $\sigma$ .  $\square$

## 2.3 Alguns exemplos concretos

### 2.3.1 Os exemplos mais simples

O possível exemplo mais simples é dado pela reta projetiva complexa  $\mathbb{CP}^1 = S^2$  como um espaço homogêneo de  $U(2)$ , e a isotropia é dada pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}.$$

Vectores tangente levantados canonicamente para vetores na álgebra de Lie  $T_1U(2)$  da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{\beta} \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

A isotropia age transitivamente nas direções em  $T_x\mathbb{CP}^1$ , e portanto a única métrica invariante são múltiplos da métrica redonda canônica dada por  $g(\beta, \beta) = |\beta|^2$ . Neste caso, as composições das funções que reduzem comprimento colapsam, e uma é levantamento com a identidade em  $\mathbb{CP}^1$ : escolhamos a identidade de  $U(2)$  como representação de Grassmann, e para qualquer vetor tangente

$$\xi = (T_1\pi) \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\beta} \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

A reflexão

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é uma reflexão isotrópica adaptada a  $\xi$ . A isotropia de  $r_0$  coincide com a isotropia de  $\mathbb{CP}^1$ , e a composição

$$\mathcal{P} \xrightarrow{F} Gr(\mathcal{H}) \xrightarrow{m_\xi} \mathcal{S}$$

é a identidade.

Uma característica importante deste exemplo e de fato de todas as variedades de Grassmann é que a norma quociente coincide com a “norma conexão”, isto é, o levantamento canônico anterior realmente realiza a norma mínima de todos os levantamentos possíveis.

Consideremos agora o espaço  $\mathcal{P} = U(3)/U(1) \times U(1) \times U(1)$  de 3-bandeiras em  $\mathbb{C}^3$ . A isotropia está composta de matrizes unitárias diagonais, e um vetor tangente  $X \in T_\rho\mathcal{P}$  que tem um levantamento canônico para  $T_1U(3)$  da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{a} & -\bar{b} \\ a & 0 & -\bar{c} \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Em contraste ao exemplo anterior, o levantamento canônico em geral não realiza a norma quociente, e o problema de encontrar tal levantamento mínimo em geral é completamente difícil. Existem configurações especiais, no entanto, na qual o levantamento canônico realmente realiza a norma, por exemplo vetores da forma

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{a} & -\bar{b} \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Para tal  $Z$  e qualquer bandeira  $\rho \in \mathcal{P}$ , a curva  $L_{etz} \rho$  é mínima para comprimento até  $\pi/2$ . Para este tipo de vetores podemos escolher como representação a identidade de  $B(\mathbb{C}^3)$ , e como reflexão isotrópica a matriz

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Com modificações menores, neste exemplo podemos substituir  $\mathbb{C}^3$  por um espaço de Hilbert geral  $\mathcal{H}$  e qualquer número (finito) de bandeiras. Mais exatamente, se  $\mathcal{H}$  é decomposto como  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ , qualquer operador  $A \in B(\mathcal{H})$  pode ser escrito em forma matricial  $A_{ij}$  com respeito à decomposição  $A_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$ . Se  $D$  é o espaço de matrizes diagonais, o espaço homogêneo  $U(\mathcal{H})/D$  é o espaço de  $n$ -bandeiras em  $\mathcal{H}$ , e aplica a mesma argumentação.

O tipo de vetores para o qual podemos calcular realmente o mínimo na fibra, como em  $Z$  acima, pode ser dado para qualquer bandeira generalizada:

### 2.3.2 Vetores tangentes tipo Grassmann

Aqui olhamos no caso onde temos uma projeção  $p \in \mathcal{A}$  a qual está no comutante de  $\mathcal{B}_{\rho_0}$ ; isto abstrai a situação do parágrafo anterior. Nesta situação podemos descrever vetores tangentes especiais como segue:

**Teorema 2.39** *Suponha que existe um projetor autoadjunto  $p \in \mathcal{A}$  o qual está no comutante da subálgebra-  $C^*$   $\mathcal{B}_{\rho_0}$  em  $\mathcal{A}$ . Suponha que um vetor tangente  $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$  admite um levantamento mínimo  $Z$ , e que  $Z \in \mathcal{A}$  tem grau um com respeito a  $p$ , ou seja,  $pZ = Z(1 - p)$ . Então  $X$  é a velocidade inicial da curva do grupo uni-paramétrico que minimiza comprimento em  $\mathcal{P}$  até  $t = \frac{\pi}{2\|X\|_{\rho_0}}$ .*

**Demonstração.** De acordo ao teorema (2.26), é suficiente mostrar que  $\mathcal{A}$  admite uma representação adaptada a  $X$ . Da teoria geral de representações de álgebras- $C^*$  (ver [15] ou [16]), podemos escolher uma representação  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  para algum espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  onde existe um vetor  $\eta$  que realiza a norma de  $\phi(Z^2)$ . A projeção ortogonal  $\phi(p)$ , produz em  $\mathcal{H}$  uma decomposição ortogonal na qual podemos escrever  $\phi(Z)$  da forma

$$\phi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix},$$

por esta razão

$$\phi(Z^2) = - \begin{pmatrix} z^*z & 0 \\ 0 & zz^* \end{pmatrix}.$$

Note que, em tal decomposição  $\eta$  é dado como  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$  e satisfaz que,

$$z^*z(\eta_1) = -\lambda^2\eta_1, \quad \lambda = |Z| (= \|\phi(Z)\|).$$

Consideremos primeiro o caso  $\eta_1 \neq 0$ . A ideia é que podemos definir  $\xi = \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  a normalização de  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  em  $\mathcal{H}$ . Com este  $\xi$  podemos verificar que a representação escolhida

previamente é adaptada a  $X$ . Com efeito, qualquer  $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}$  comuta com  $p$ , e  $\phi(b)$  é apresentado como uma matriz diagonal de operadores

$$\phi(b) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Disso a condição de ortogonalidade é satisfeita pois

$$\phi(Z)\xi = \begin{pmatrix} 0 & -z^* \\ z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z\eta'_1 \end{pmatrix}$$

e

$$\phi(b)\xi = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\eta'_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No caso em que  $\eta_1 = 0$  procedemos similarmente, considerando a componente  $\eta_2 \neq 0$  em lugar de  $\eta_1$ .  $\square$

### 2.3.3 Um exemplo concernente ao diâmetro

Sabe-se da seção anterior que o diâmetro de variedades de Grassmann é  $\pi/2$ . A proposição (2.38) nos diz que o diâmetro de uma bandeira generalizada está no intervalo  $[\pi/2, \pi]$ . O diâmetro do grupo unitário, como uma bandeira generalizada trivial, é  $\pi$ , porém resta estudar o diâmetro de bandeiras generalizadas não triviais. Aqui mostramos exemplos não triviais de diâmetros próximos a  $\pi$ : considere a álgebra- $C^*$   $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ , cujo grupo unitário é o  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n$ . Seja  $\mathcal{B}$  a subálgebra escalar, e olhemos o espaço homogêneo  $\mathcal{P}_n = U(\mathcal{A})/U(\mathcal{B}) = \mathbb{T}^n/\Delta$  onde  $\Delta$  é a diagonal de  $\mathbb{T}^n$ .

Considere o ponto  $\rho \in \mathcal{P}_n$  dado pela projeção de

$$\left( e^{-i\pi}, e^{-i\frac{n-1}{n}\pi}, \dots, e^{-i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{n-1}{n}\pi}, e^{i\pi} \right) = u \in U(\mathcal{A}),$$

isto é,  $u = \text{diag} \left( e^{ik\frac{\pi}{n}} \right)$ ,  $k = -n, \dots, n$  omitindo  $k = 0$ . A fibra sobre  $\rho$  é dada pelos pontos da forma  $u_r = e^{ir}u = \text{diag} \left( e^{i\frac{(r+k\pi)}{n}} \right)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . É fácil ver que se  $u_r = e^Z$ ,  $Z = (iz_{-n}, \dots, iz_n)$ , então ao menos um dos  $z_i$  pode estar próximo a  $\pi$  se  $n$  é suficientemente grande. Isto mostra que  $\text{diam}(\mathcal{P}_n) \rightarrow \pi$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mais exatamente, em [11] se mostra que  $\text{diam}(\mathcal{P}_n) = \frac{n-1}{n}\pi$ . É fácil construir um exemplo na mesma linha de ideias em  $\mathcal{P} = U(\mathcal{A})/U(\mathcal{B})$  onde  $\mathcal{A} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{B}$  os escalares, onde o diâmetro é exatamente  $\pi$ .

### 2.3.4 Um exemplo de não unicidade

Em álgebras- $C^*$  gerais, elementos com norma mínima em alguma classe de equivalência são introduzidos e caracterizados. No artigo [2] foi estudado o conjunto de matrizes hermitianas mínimas, no caso onde a álgebra- $C^*$  consiste das matrizes complexas  $3 \times 3$ , o quociente é tomado pela subálgebra de matrizes diagonais. Estuda-se inteiramente o conjunto de matrizes mínimas particularmente por sua relação com o problema geométrico de encontrar curvas mínimas em variedades bandeira. Para a variedade bandeira de “quatro retas complexas mutuamente ortogonais” em  $\mathbb{C}^4$ , se mostrou que existem muitas curvas mínimas unindo pontos arbitrariamente próximos. No caso da variedade bandeira de “três retas complexas mutuamente ortogonais” em  $\mathbb{C}^3$  o fenômeno de múltiplas curvas mínimas unindo pontos arbitrariamente próximos não ocorre. Em nosso trabalho

só apresentamos o caso da variedade bandeira de “quatro retas complexas mutuamente ortogonais” em  $\mathbb{C}^4$ .

Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra- $C^*$  com unidade e  $1 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  uma subálgebra- $C^*$ . Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  os grupos unitários de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Denotamos com  $\mathcal{A}^{ant}$  e  $\mathcal{B}^{ant}$  os conjuntos de elementos anti-hermitianos de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , ou seja, as álgebras de Lie de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ , respectivamente. Finalmente, denote por  $\mathcal{P}$  o espaço homogêneo  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ , com a ação natural esquerda  $L_g$ ,  $g \in \mathcal{U}$ , de  $\mathcal{U}$  em  $\mathcal{P}$ . O espaço  $\mathcal{P}$  está munido da métrica de Finsler invariante dada pela norma quociente no espaço de Banach  $\mathcal{A}^{ant}/\mathcal{B}^{ant}$  (o espaço tangente a  $\mathcal{P}$  no ponto base).

O teorema (2.33) provado na seção anterior mostra a importância do conjunto de vetores mínimos no estudo do espaço de curvas mínimas em tais espaços homogêneos.

Apresentamos uma caracterização conveniente do conjunto de vetores mínimos para álgebras- $C^*$  gerais (teorema (2.42)). Este resultado está inspirado no teorema (2.33), foi publicado em [1].

Consideramos o caso onde  $\mathcal{A}$  é a álgebra- $C^*$  de matrizes complexas  $4 \times 4$ , e  $\mathcal{B}$  é a subálgebra de matrizes diagonais em  $\mathcal{A}$ . Neste caso, vetores mínimos diferentes podem dar origem a curvas mínimas diferentes, mais ainda o seguinte fenômeno inusual é mostrado: existem infinitas curvas mínimas unindo pontos arbitrariamente próximos. Este resultado foi publicado em [1].

## Vetores mínimos

Denotemos com  $\mathcal{A}^h$  e  $\mathcal{B}^h$ , os conjuntos de elementos hermitianos de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  para introduzir a seguinte definição

**Definição 2.40** Chamamos um elemento  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  **mínimo** se  $\|Z\| \leq \|Z + V\|$ , para todo  $V \in \mathcal{B}^{ant}$ . Similarmente, no caso hermitiano, qualquer  $Z \in \mathcal{A}^h$  é dito **mínimo** se  $\|Z\| \leq \|Z + V\|$ , para todo  $V \in \mathcal{B}^h$ .

**Observação 2.41** Note que como para qualquer operador,  $\|Im(X)\| \leq \|X\|$  e  $\|Re(X)\| \leq \|X\|$  segue que  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  (ou  $Z \in \mathcal{A}^h$ ) é mínimo se e somente se  $\|Z\| \leq \|Z + B\|$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

O próximo teorema segue ideias da seção anterior. Vamos escrevê-lo abaixo em sua forma anti-hermitiana, e um teorema similar pode ser mostrado para o conjunto isométrico de elementos hermitianos.

**Teorema 2.42** Um elemento  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  é mínimo se e somente se existe uma representação  $\phi$  de  $\mathcal{A}$  no espaço  $B(\mathcal{H})$  e um vetor unitário  $\xi$  tal que  $\phi(Z^2)\xi = -\|Z\|^2\xi$ , e  $\langle \phi(Z)\xi, \phi(B)\xi \rangle = 0$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ .

**Demonstração.** Suponha primeiro que existem  $\phi$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\xi$  como no enunciado, então se  $B \in \mathcal{B}$ ,

$$\begin{aligned} \|Z + B\|^2 &\geq \|\phi(Z + B)\xi\|^2 = \|\phi(Z)\xi\|^2 + \|\phi(B)\xi\|^2 \\ &\geq \|\phi(Z)\xi\|^2 \\ &= -\langle \phi(Z^2)\xi, \xi \rangle \\ &= \|Z\|^2. \end{aligned}$$

Suponha agora que  $Z$  é mínimo. Denotemos novamente por  $S$  o subespaço real, linear e fechado gerado pelo elemento  $Z^2 + \|Z\|^2 1$  e os operadores da forma  $ZB - B^*Z$  para todo  $B \in \mathcal{B}$  possível. Note que  $Z^2 + \|Z\|^2 1$  é positivo e  $ZB - B^*Z$  é hermitiano, isto é,  $S \subset \mathcal{A}^h$ .

Denote por  $C$  o cone de elementos invertíveis positivos de  $\mathcal{A}$ . Fazemos uma afirmação

**Afirmção 2.43** *A condição de minimalidade implica que  $S \cap C = \emptyset$ .*

**Demonstração.** Como  $C$  é aberto, existiria de outra forma um  $s \in \mathbb{R}$  e algum  $B \in \mathcal{B}$  tais que  $s(Z^2 + \|Z\|^2 1) + ZB - B^*Z \geq r1$ , com  $r > 0$ . Podemos assumir que  $s > 0$ , assim que dividindo por  $s$  obtemos que para algum  $B \in \mathcal{B}$ ,  $r > 0$ ,

$$Z^2 + \|Z\|^2 1 + ZB - B^*Z \geq r1. \quad (2.2)$$

Também observe que  $Z^2 + \|Z\|^2 1 \geq 0$ , logo para  $n \geq 1$ ,

$$n(Z^2 + \|Z\|^2 1) + ZB - B^*Z \geq Z^2 1 + ZB - B^*Z \geq r1$$

ou equivalentemente, dividindo por  $n$ ,

$$Z^2 + \|Z\|^2 1 + Z \left( \frac{1}{n} B \right) - \left( \frac{1}{n} B^* \right) Z \geq r'1.$$

Em outras palavras, pode-se encontrar  $B \in \mathcal{B}$  de norma arbitrariamente pequena tal que a desigualdade (2.2) é satisfeita. Esta desigualdade claramente implica que

$$\sigma(Z^2 + ZB - B^*Z) \subset (-\|Z\|^2, +\infty).$$

Por outro lado, como  $B$  pode ser escolhido de norma arbitrariamente pequena, e  $Z^2$  é não positivo, é claro que se pode escolher  $B$  de modo que  $\sigma(Z^2 + ZB - B^*Z) \subset (-\infty, \|Z\|^2)$ . Portanto existe  $B \in \mathcal{B}^{ant}$  tal que  $\|Z^2 + ZB - B^*Z\| < \|Z\|^2$  mas isto contradiz a minimalidade de  $Z$  pelo lema (2.32).

Temos que  $S \cap C = \emptyset$ . Pelo teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear limitado  $\varphi_0$  em  $\mathcal{A}^h$  tal que

$$\varphi_0(S) = \{0\} \quad \text{e} \quad \varphi_0(C) = (0, +\infty).$$

O funcional  $\varphi_0$  tem uma extensão hermitiana a  $\mathcal{A}$  única, seja  $\varphi$  a normalização deste funcional. Então claramente  $\varphi$  é um estado que se anula em  $S$ . Sejam  $\phi, \mathcal{H}, \xi$  a tripla GNS associada a este estado. Note que  $Z^2 + \|Z\|^2 1 \in S$ ,  $\langle \phi(Z^2)\xi, \xi \rangle = \varphi(Z^2) = -\|Z\|^2$ , e por conseguinte, pela parte da igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\phi(Z^2)\xi = -\|Z\|^2 \xi.$$

Mais ainda,  $0 = \varphi(ZB - B^*Z + Z^2 + \|Z\|^2 1) = \varphi(ZB - B^*Z)$ . Como  $\varphi$  é hermitiana, isto significa que  $\text{Re}(\varphi(ZB)) = 0$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ . Pondo  $iB$  em lugar de  $B$ , tem-se que  $\varphi(ZB) = 0$  para todo  $B \in \mathcal{B}$ . Então  $0 = \langle \phi(ZB)\xi, \xi \rangle = \langle \phi(Z)\xi, \phi(B)\xi \rangle$ .  $\square$

Agora apresentamos uma variedade de Finsler de dimensão finita a qual tem muitas curvas mínimas unindo pontos arbitrariamente próximos.

**A variedade bandeira  $\mathcal{P}(4)$  de 4-uplas de retas mutuamente ortogonais em  $\mathbb{C}^4$** 

Considere o espaço homogêneo  $\mathcal{P}(4)$ , a variedade bandeira de 4-uplas de retas mutuamente ortogonais em  $\mathbb{C}^4$ . O grupo de operadores unitários em  $\mathbb{C}$  age pela esquerda em  $\mathbb{C}^4$ , enviando cada reta complexa a sua imagem pelo operador. Considere a bandeira canônica  $p_e = (\text{span}\{e_1\}, \text{span}\{e_2\}, \text{span}\{e_3\}, \text{span}\{e_4\})$  onde  $\text{span}\{e_i\}$  é a reta complexa gerada pelo vetor canônico  $e_i$  em  $\mathbb{C}^4$ . A isotropia de  $p_e$  é o subgrupo de operadores unitários “diagonais”.

Considere a subvariedade  $\mathcal{P}_d$  de  $\mathcal{P}(4)$  dada por

$$\mathcal{P}_d = \{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathcal{P}(4); \text{span}\{l_1, l_2\} = \text{span}\{e_1, e_2\}\}.$$

Note que  $\mathcal{P}_d = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$  onde  $\mathcal{W}$  é a variedade bandeira de duplas de retas complexas mutuamente ortogonais de dimensão um em  $\mathbb{C}^2$ . Note também que um par ordenado de retas complexas mutuamente ortogonais de dimensão um em  $\mathbb{C}^2$  é totalmente determinado pela primeira reta complexa do par, logo  $\mathcal{W} = \mathbb{CP}(2)$ . Mais ainda,  $\mathbb{CP}(2) = \mathcal{R}S$ , a esfera de Riemann, portanto  $\mathcal{W} = \mathcal{R}S$ .

As curvas mínimas apresentadas neste exemplo serão construídas em  $\mathcal{P}_d$ . Para uma melhor percepção geométrica dessas curvas identificaremos  $\mathcal{R}S$ , via projeção estereográfica, com a esfera unitária  $S^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , assim faremos a identificação  $\mathcal{P}_d = S^2 \times S^2$ .

Seja  $\mathcal{N} = (N, N) \in \mathcal{P}_d = S^2 \times S^2$  o ponto cujas coordenadas são ambas o polo norte,  $N \in S^2$ . Seja  $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2) \in S^2 \times S^2$  qualquer ponto de  $\mathcal{P}_d$  tal que  $Q_1$  tem latitude maior que  $Q_2$  em  $S^2$  ( $Q_1$  está mais perto de  $N$  que  $Q_2$ ).

Vamos fixar  $\mathcal{Q}$  de forma que  $Q_2$  esteja acima do equador e  $Q_1$  esteja nivelado mais alto. Introduzimos uma família de curvas mínimas  $\Gamma_\beta(t) = (\gamma_{1,\beta}(t), \gamma_2(t))$  para  $t \in [0, 1]$ , todas unindo  $\mathcal{N}$  a  $\mathcal{Q}$ .

- A curva  $\gamma_2(t)$  em  $S^2$  traçará o menor arco do grande círculo que contém  $N$  e  $Q_2$ .
- A família de curvas  $\gamma_{1,\beta}(t)$  variará continuamente com o parâmetro  $\beta$ .
- Cada uma das curvas da família  $\gamma_{1,\beta}(t)$  parametrizará o menor arco de algum círculo em  $S^2$  que une  $N$  a  $Q_1$ ; os arcos não estarão em grandes círculos, exceto para  $\beta = 0$ .

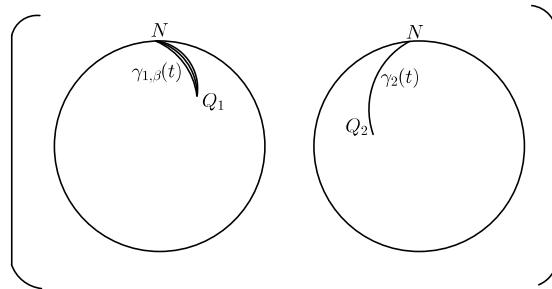


Figura 2.7: Família de curvas mínimas.

Apresentar as curvas desenhadas acima nos dá uma descrição mais manipulável de  $\mathcal{P}(4)$ . Consideremos o subgrupo unitário  $\mathcal{U} = U(4)$  da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A} = \mathbb{M}_4(\mathbb{C})$  de matrizes complexas  $4 \times 4$ , e denote com  $\mathcal{B}$  a subálgebras de matrizes diagonais em  $\mathcal{A}$ . O espaço homogêneo  $\mathcal{P}(4)$  é dado pelo quociente  $\mathcal{U}/\mathcal{D}$ , onde  $\mathcal{D} = \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$  é o subgrupo de matrizes unitárias diagonais. O grupo  $\mathcal{U}$  age em  $\mathcal{P}(4)$  pela esquerda. O espaço tangente em 1 (a classe identidade) é o subespaço de matrizes anti-hermitianas em  $\mathcal{A}$  com zeros na diagonal.

Construímos  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}(4)$  como segue: primeiro considere o subgrupo  $SU(2) \times SU(2) \subset \mathcal{U}$  de matrizes unitárias especiais contruídas com dois blocos  $2 \times 2$  na diagonal. Definamos  $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}(4)$  como o quociente de  $SU(2) \times SU(2)$  pelo subgrupo  $\mathcal{D}$  de matrizes unitárias diagonais especiais. Esta subvariedade está no próprio produto de duas cópias do quociente  $\mathcal{W}$  de  $SU(2)$  pelo subgrupo de matrizes diagonais em  $SU(2)$ . Para as relações entre os diferentes grupos aqui mencionados sugerimos [20]. Escrevemos  $\mathcal{P}_d = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$  e um ponto de  $\mathcal{P}_d$  é uma classe (no quociente) a qual nela mesma tem duas componentes que também são classes. Usaremos a notação  $[U] = ([u_1], [u_2]) \in \mathcal{P}_d = \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ .

As curvas mínimas começando em  $1 \in \mathcal{P}_d$  são da forma  $\gamma(t) = [e^{tZ}]$  onde as matrizes  $Z$  são matrizes anti-hermitianas com traço zero em  $\mathcal{A}$ , construídas com dois blocos de matrizes anti-hermitianas na diagonal (cada uma com traço zero).

A minimalidade das curvas está garantida pelo teorema (2.33) para as matrizes  $Z$  que serão vetores mínimos de acordo com o teorema (2.42). De fato, consideraremos  $Z \in \mathcal{A}^{ant}$  da forma

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}$$

onde  $Z_1$  e  $Z_2$  são matrizes anti-hermitianas da forma

$$Z_1 = \begin{pmatrix} zi & r(-\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)) \\ r(\sin(\alpha) + i \cos(\alpha)) & -zi \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

e

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\bar{w} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $z, r, \alpha \in \mathbb{R}$  e  $w \in \mathbb{C}$ .

A minimalidade dessas matrizes  $Z$  está garantida no caso onde  $|w|^2 \geq z^2 + r^2$ . Em tal caso,  $\|Z\|^2 = |w|^2$  e, em relação ao teorema (2.42), justamente consideramos o operador representação  $\rho$  da álgebra- $C^*$   $\mathcal{A} = \mathbb{M}_4(\mathbb{C})$ , junto com o vetor unitário  $\xi = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{C}^4$ .

A curva  $\gamma(t) = [e^{tZ}] = ([e^{tZ_1}], [e^{tZ_2}]) \in \mathcal{P}_d$  tem duas componentes em  $\mathcal{W}$ . Consideraremos a esfera de Riemann  $\mathcal{R}S$  como o plano complexo  $\mathbb{C}$  com o ponto “ $\infty$ ” acrescentado. Considere uma matriz  $u$  em  $SU(2)$

$$u = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Consideremos a função  $L : SU(2) \rightarrow \mathcal{R}S$  dada por

$$L(u) = \frac{a}{b}, \quad \text{se } b \neq 0, \quad \text{caso contrário } L(u) = \infty.$$

É claro que esta função induz um difeomorfismo explícito do quociente de  $SU(2)$  por suas matrizes diagonais à esfera de Riemann  $\mathcal{R}S$ .

Considere a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , e o plano equatorial,  $\mathbb{C}$ , representa a parte finita da esfera de Riemann  $\mathcal{R}S$ . Definamos  $\varphi : \mathcal{R}S \rightarrow S^2$  como sendo a projeção estereográfica dada por

$$\varphi(\zeta) = \left( \frac{2\zeta}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3, \quad \text{para } \zeta \in \mathbb{C} \text{ e}$$

$$\varphi(\infty) = (0, 0, 1) = N \in S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Note que na classe  $b \neq 0$ , se  $\zeta = L(u) = \frac{a}{b} \in \mathbb{C}$ , então  $\varphi(\zeta) = (2a\bar{b}, |a|^2 - |b|^2)$ . Se  $b = 0$ , então  $|a| = 1$  e assim  $\zeta = L(u) = \infty$ , logo  $\varphi(\zeta) = (0, 0, 1)$ .

Via a composição de duas funções, definimos o difeomorfismo  $\Psi : \mathcal{W} \rightarrow S^2$ : para  $[u] = \left[ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \right] \in \mathcal{W}$  definimos

$$\Psi([u]) = \varphi(L(u)) = (2a\bar{b}, |a|^2 - |b|^2) = (2a\bar{b}, 1 - 2|b|^2) \in S^2.$$

Considerando a curva  $q(t) = e^{tZ_1}$  em  $SU(2)$  com  $Z_1$  como na fórmula (2.3), e estabelecendo  $\lambda = \sqrt{r^2 + z^2}$ , pode ser verificado que  $L(q(t)) \in \mathcal{R}S$  é dada por,

$$L(q(t)) = \frac{z(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))}{r} + \cot(t\lambda) \frac{\lambda(\sin(\alpha) - i \cos(\alpha))}{r}, \quad \text{se } t \notin \left\{ \frac{k\pi}{\lambda}; k \in \mathbb{N} \right\}$$

e,

$$L(q(t)) = \infty, \quad \text{se } t \in \left\{ \frac{k\pi}{\lambda}; k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.5)$$

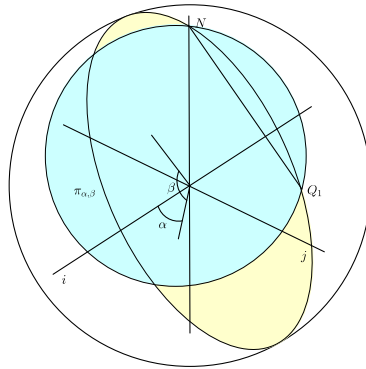


Figura 2.8: Suponhamos que  $Q_1$  está no plano gerado por  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ .

Note que  $L(q(t))$  parametriza uma linha reta  $l_q$  em  $\mathcal{R}S$ . Logo, a curva

$$\Psi([q(t)]) = \varphi(L(q(t)))$$

é um arco de um círculo em  $S^2$  (não necessariamente um grande círculo) contido no plano em  $\mathbb{R}^3$  que contém ambos, a reta  $l_q$  no plano equatorial e o polo norte em  $S^2$ . Pode-se verificar que este plano tem vetor normal unitário dado por

$$\pm(\cos(\beta) \cos(\alpha), \cos(\beta) \sin(\alpha), \sin(\beta))$$

onde  $\cos(\beta) = \frac{r}{\lambda}$ ,  $\sin(\beta) = \frac{z}{\lambda}$ , com  $\lambda = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

Definamos agora  $\gamma_{1,\beta}(t) = \Psi([e^{tZ_1}])$ , onde  $\cos(\beta) = \frac{r}{\lambda}$ ,  $\sin(\beta) = \frac{z}{\lambda}$ , com  $\lambda = \sqrt{r^2 + z^2}$ , e defina  $\gamma_2(t) = \Psi([e^{tZ_2}])$ .

- Nas construções anteriores, a curva  $\gamma_{1,\beta}(t)$  percorre um grande círculo em  $S^2$  se, e somente, se  $\beta = 0$  (equivalentemente  $z = 0$ ).
- A curva  $\gamma_2(t)$  percorre um grande círculo em  $S^2$  ( $Z_2$  tem parâmetro  $z = 0$ ).
- A curva  $\gamma_{1,\beta}(t)$  varia continuamente com o parâmetro  $\beta$ .
- A curva  $\gamma_{1,\beta}(t)$  começa em  $N \in S^2$  e volta ao ponto exatamente para  $t \in \{\frac{k\pi}{\lambda}; k \in \mathbb{N}\}$ .
- A curva  $\gamma_{1,\beta}(t)$  tem velocidade constante  $2\lambda \cos(\beta)$  em  $S^2$ .
- A curva  $\gamma_2(t)$  tem velocidade constante  $2r$  em  $S^2$ .

Damos valores explícitos para os “parâmetros”  $z, \alpha, r \in \mathbb{R}$  e  $w \in \mathbb{C}$  que definem  $Z_1$  e  $Z_2$  (de acordo às fórmulas (2.3) e (2.4)), de forma que para  $t \in [0, 1]$ , as curvas  $\gamma_{1,\beta}(t) = \Psi([e^{tZ_1}])$  e  $\gamma_2(t) = \Psi([e^{tZ_2}])$  unem o ponto  $N$  a  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente.

Suponha que as distâncias de  $N$  a  $Q_1$  e  $Q_2$  em  $S^2$  são  $2\phi_1$  e  $2\phi_2$ , respectivamente (com  $\phi_1 < \phi_2$ ). Por meio de alguma rotação da esfera  $S^2$  podemos supor que  $Q_1$  está no plano gerado por  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , como na Figura 2.8, e temos que  $Q_1 = (0, \sin(2\phi_1), \cos(2\phi_1))$  e  $Q_2 = (\sin(2\phi_2) \cos(\theta_2), \sin(2\phi_2) \sin(\theta_2), \cos(2\phi_2))$ .

Para  $Z_2$  definamos  $w = \phi_2(-\sin(\theta_2) + i \cos(\theta_2))$  de forma que  $\gamma_2(1) = \Psi([e^{tZ_2}]) = Q_2$ .

Temos que escolher os valores  $z, \alpha, r \in \mathbb{R}$  que definem  $Z_1$ . Isto é equivalente a escolher  $\beta, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$  via mudança de variáveis dada pelas equações

$$\cos(\beta) = \frac{r}{\lambda}, \quad \sin(\beta) = \frac{z}{\lambda}, \quad \text{com } \lambda = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são mostrados na Figura 2.8, com a única restrição de que o vetor

$$\vec{n} = (\cos(\beta) \cos(\alpha), \cos(\beta) \sin(\alpha), \sin(\beta))$$

seja ortogonal a um plano  $\pi_{\alpha,\beta}$  que contém  $N$  e  $Q_1$ .

O parâmetro  $\lambda$  é determinado após a escolha de  $\alpha$  e  $\beta$  de forma que o arco curto unindo  $N$  e  $Q_1$  na intercepção do plano  $\pi_{\alpha,\beta}$  com a esfera  $S^2$  como na Figura 2.8 tem comprimento  $\ell$  igual a  $2\lambda \cos(\beta)$ , de onde é extraído o valor de  $\lambda$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] E. Andruchow, L. Mata-Lorenzo, A. Mendoza, L. Recht, and A. Varela. Infinitely many minimal curves joining arbitrarily close points in a homogeneous space of the unitary group of a  $C^*$ -algebra. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 46:113 – 120, 2005.
- [2] E. Andruchow, L. Mata-Lorenzo, A. Mendoza, L. Recht, and A. Varela. Minimal matrices and the corresponding minimal curves on flag manifolds in low dimension. *Linear Algebra and its Applications*, 430(8–9):1906 – 1928, 2009.
- [3] E. Andruchow, L. Recht, and D. Stojanoff. The space of spectral measures is a homogeneous reductive space. *Integral Equations and Operator Theory*, 16(1):1–14, 1993.
- [4] W. Arveson. *An invitation to  $C^*$ -algebra*. Springer, 1976.
- [5] G. Corach, H. Porta, and L. Recht. Multiplicative integrals and geometry of spaces of projections. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 34:132–149, 1988.
- [6] G. Corach, H. Porta, and L. Recht. Differential geometry of systems of projectors in banach algebras. *Pacific J. Math.*, 143(1):209–228, 1990.
- [7] G. Corach, H. Porta, and L. Recht. The geometry of spaces of projections in  $C^*$ -algebras. *Adv. in Math.*, 101(1):59–77, 1993.
- [8] K. Davidson.  *$C^*$ -algebras by example*. American Mathematical Society, 1996.
- [9] P. De la Harpe and V. Jones. *An introduction to  $C^*$ -algebras*. Université de Genève, Section de Mathématiques, 1995.
- [10] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, and L. Recht. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a  $C^*$ -algebra: Part i—minimal curves. *Adv. in Math.*, 184(2):342 – 366, 2004.
- [11] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, and L. Recht. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a  $c^*$ -algebra. part ii. geodesics joining fixed endpoints. *Integral Equations and Operator Theory*, 53(1):33–50, 2005.
- [12] I. M. Gelfand and M. A. Naimark. On the embedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space. *Mat. Sb.*, 12:197–213, 1943.
- [13] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*. Springer, 1974.
- [14] S. Helgason. *Groups and geometric analysis, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical fucntions*. Mathematical Surveys and Monographs, 83, 1984.

- [15] R. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I*. Academic Press, New York, 1983.
- [16] G. K. Pedersen.  *$C^*$ -algebras and their Automorphism Groups*. Academic Press, London, 1973.
- [17] H. Porta and L. Recht. Minimality of geodesics in grassmann manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(3):464–466, 1987.
- [18] S. Sakai.  *$C^*$ -Algebras and  $W^*$ -Algebras*. Springer, Berlin, 1971.
- [19] I. Segal. Irreducible representations of operator algebras, *bull. Amer. Math. Soc.*, 53:73–88, 1947.
- [20] E. T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press, London, 1988.